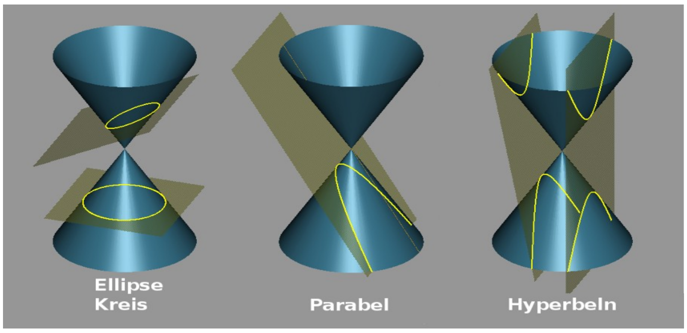
# Kegelschnitte

Die Bahnkurven von Objekten im Weltraum – beispielsweise von Planeten um die Sonne, von Monden um die Planeten oder auch Raumschiffe oder Satelliten um Planeten sind Kegelschnittkurven.

Kegelschnitte sind Kurven, deren Graphen durch das Schneiden eines Doppelkegels entstehen.




Dabei können im Wesentlichen drei Fälle auftreten:

(*)

Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ mit $a,b\neq 0$

Der Spezialfall a=b ist ein Kreis.

Parabel $y = ax^2$ mit $a\neq 0$

Hyperbel $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ mit $a,b\neq 0$

Beachte, dass die Hyperbel 2 Äste besitzt.

Formt man wie gewohnt die Gleichungen nach y=f(x) um, erhält man

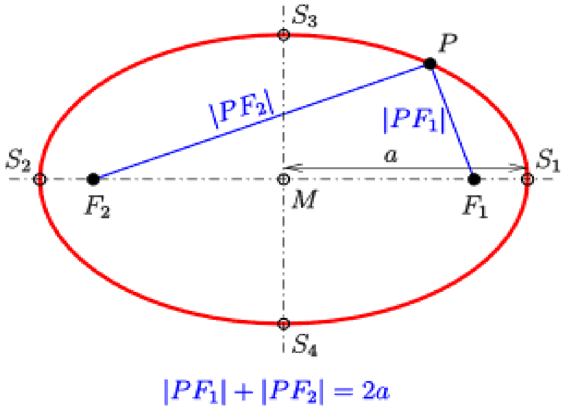
(**)

Ellipse f(x) = $y=\mp\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

Parabel f(x) = $y = ax^2$

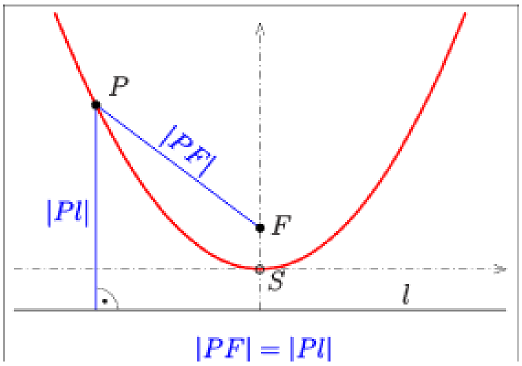
Hyperbel f(x) = $y=\mp\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

**Ellipse:**
Eine Ellipse lässt sich anschaulich als Punktmenge definieren. Sind zwei Brennpunkte $F_1$ und $F_2$ gegeben, sind alle Punkte P gesucht, deren Summe der Abstände zu den Brennpunkten gleich 2a (also konstant) ist.

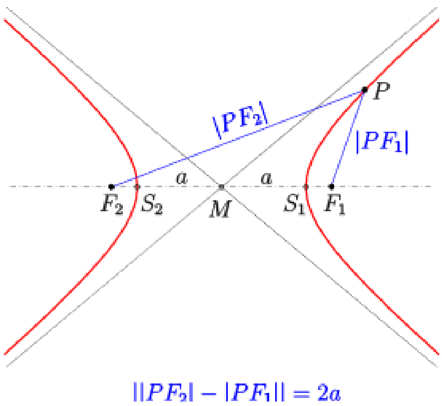



Die Summe 2a dieser Abstände entspricht damit dem Abstand der Punkte $S_1$ und $S_2$ (s. Zeichnung). Diese Strecke nennt man auch die große Halbachse a der Ellipse, entsprechend ist die Strecke von $S_3$ bis $S_4$ die kleine Halbachse b der Ellipse. Der Schnittpunkt der Achsen ist der Mittelpunkt M(0/0).
Als Spezialfall der Ellipse erhält man einen Kreis, wenn die beiden Brennpunkte $F_1$ und $F_2$ mit dem Mittelpunkt zusammenfallen.

**Parabel:**
Eine Parabel ist die Punktmenge, deren Abstand von einer Leitlinie (Leitgeraden) l und dem Brennpunkt F gleich ist (s. Zeichnung).




**Hyperbel:**
Eine Hyperbel ist die Punktmenge, deren Betrag der Differenz der Abstände zu zwei gegebenen Brennpunkten $F_1$ und $F_2$ konstant (=2a) ist.
Aus dem Betrag folgen 2 Hyperbeläste.

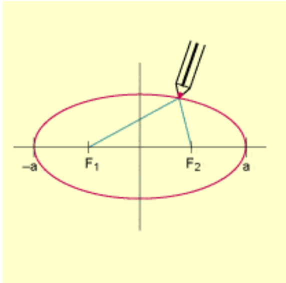


**Aufgaben**:

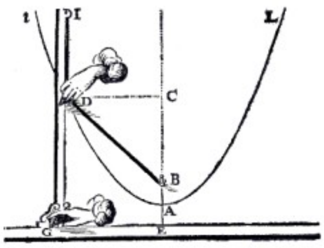
1. Forme die Gleichungen (*) der Ellipse und der Hyperbel so um, dass die Gleichungen (**) erscheinen.

2. Konstruiere die Kegelschnitte:

   a) *Fadenkonstruktion der Ellipse :* Ein Faden der Länge 2 a > 2 e (2e Abstand der Brennpunkte) wird in F 1 u n d F 2 befestigt. Ein Schreibstift am gespannten Faden beschreibt dann die Ellipse (Gärtnerkonstruktion).




   b) Fadenkonstruktion der Parabel: Ein Faden wird im Brennpunkt B und am Ende I eines Holzstabes GI, der entlang der zum Holzstab orthogonalen Leitlinie GE bewegt werden kann, fixiert. Der Faden besitzt die Länge GI. Verschiebt man nun den Holzstab, sorgt der Schreibstift am Punkt D für einen gespannten Faden und beschreibt die Parabel.
   Die Konstruktion stammt von Frans van Schooten (1615-1660).
   Begründe, dass die Abstände GD und DB gleich sind: |GD| = |DB|.




3. a) Eine Ellipse besitzt den Brennpunkt F1 (-5/0) und geht durch den Punkt P(3/4). Gib die Gleichung der Ellipse an.

   b) Eine Ellipse besitzt den Brennpunkt F1 ($\sqrt{15}$/0) und geht durch den Punkt P(2/2). Gib die Gleichung der Ellipse an.

   c) Gegeben sei eine Ellipse mit $9x^2 + 4y^2 = 180$. P1($-3/y_1$) und P2($x_2/1$) seien Punkte der Ellipse. Gib die fehlenden Koordinaten an (je zwei Lösungen).

**Lösung** für Aufgabe 3a (s. Zeichnung Ellipse):

$|F_1P|+|F_2P|=2a$ mit $F_2(5/0)$.

Dann gilt $|F_1P|=\sqrt{(5+3)^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$ und
$|F_2P|=\sqrt{(5-3)^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Also $4\sqrt{5}+2\sqrt{5}=6\sqrt{5}=2a\Rightarrow a=3\sqrt{5}$ große Halbachse

Sei Q(0/b) ein Schnittpunkt der Ellipse mit der y-Achse (entspricht $S_3$ in der Zeichnung), dann $|F_1Q|=|F_2Q|=a=\sqrt{5^2+b^2}=3\sqrt{5}$, daraus $b^2 = 20$.

Die Gleichung der Ellipse lautet somit $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ oder $9x^2 + 4y^2 = 180$.

Die Aufgabe3b entsprechend.