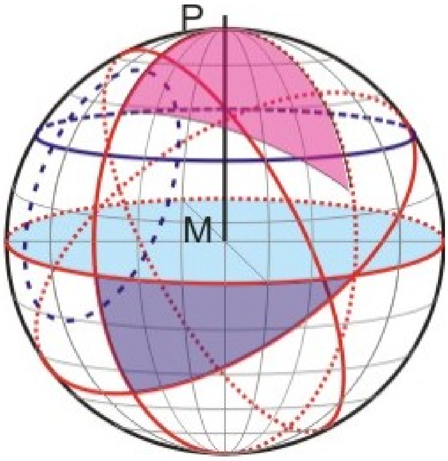
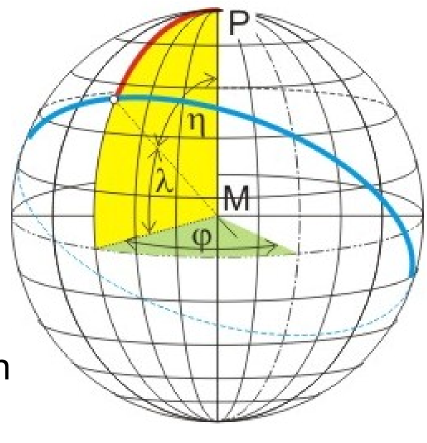
Sphärische Trigonometrie

Die Geometrie der Dreiecke auf der Kugeloberfläche hat viele Analogien mit der Trigonometrie in der Ebene, die wesentlich von EUKLID zusammengefasst worden ist. So finden die Geraden in der Ebene ihre Entsprechung in den Kreisen auf der Kugeloberfläche, deren Mittelpunkt mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfällt (Großkreise). Großkreise werden durch zwei Punkte eindeutig bestimmt, das Großkreissegment zwischen den beiden Punkten ist die kürzeste Entfernung und Kugeldreiecke werden durch die Schnittpunkte dreier Großkreise gebildet. Anders als Geraden in der Ebene haben Großkreise aber eine endliche Länge (den Kugelumfang), es gibt keine parallelen Großkreise und die Winkelsumme im sphärischen Dreieck ist größer als 180° ($2\cdot\pi$) aber kleiner als 540° ($6\cdot\pi$).



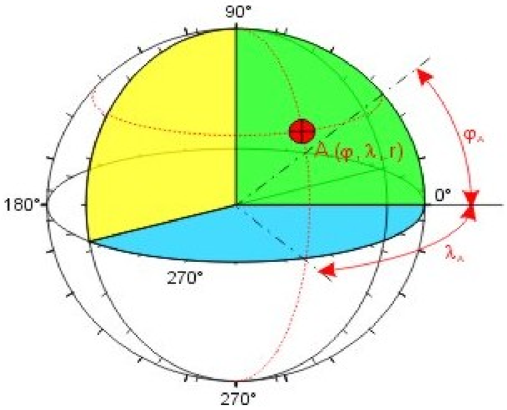
Im Bild rechts sind Kreise auf der Kugeloberfläche eingezeichnet. Zwei Arten von Kreisen werden unterschieden: Kreise, die den Kugelmittelpunkt M auch zu ihrem Mittelpunkt haben, nennt man **Großkreise** (rot). Alle anderen sind **Kleinkreise**. Ein Großkreis entsteht, wenn man eine Kugel in zwei gleich große Hälften teilt. Das Lot auf der Ebene dieses Großkreises durchstößt die Kugel im **Pol** P. Alle Großkreise, die durch den Pol gehen (Meridiane) schneiden den halbierenden Großkreis (Äquator) im rechten Winkel. Die Ebene des Großkreises und der Pol bilden das Koordinatensystem, das Navigatoren kennen.



In den Formeln werden nicht nur die Dreieckswinkel, sondern auch die Dreiecksseiten in Bogengrad angegeben werden. (Zur Unterscheidung werden **Dreieckswinkel** mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet, die **Dreiecksseiten** mit kleinen lateinischen.) Das ist möglich durch die Verwendung des Bogenmaßes auf einer Kugel mit dem Radius 1. Die Länge eines Kreissegments auf einem Großkreis entspricht dann dem Winkel, unter dem man den Bogen vom Mittelpunkt aus sieht. Der rote Bogen im Bild links ist also η° lang. Gemessen wird in der Ebene des Großkreis (hier gelb). Auf der Erdkugel wäre er $\eta° \cdot 60$ Seemeilen lang.
Anmerkung: *Die Seemeile ist als Bogenminute auf einer Kugel mit dem mittleren Erddurchmesser definiert. Das macht Entfernungsangaben in Seemeilen einfach: man braucht nur die Großkreisbogenlänge zu bestimmen.*

Kugelkoordinaten

Analog zum Polarkoordinatensystem wird die Lage eines Punktes im Raum durch die Entfernung r vom Kugelmittelpunkt und zwei Winkel φ und λ bezeichnet.



Der Winkel λ bezeichnet den (mathematisch positiven) Drehwinkel in der x-y-Ebene (Äquator) bezogen auf die x-Achse.. Es gilt 0<= λ < 2π. (Als Längengrad von -180< λ <=180).
Der Winkel φ bezeichnet den Winkel zwischen der Äquatorebene und der z-Achse (-π/2 <=0<=π/2). Er entspricht dem Breitengrad.

Kugel- in kartesische Koordinaten:

$$x = r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda$$
$$y = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda$$
$$z = r \cdot \sin\varphi$$

Kartesische in Kugelkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \arctan\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lambda = \arctan\frac{y}{x}, \text{für } x > 0,\ y > 0$$

$$\lambda = \pi + \arctan\frac{y}{x}, \text{für } x > 0$$

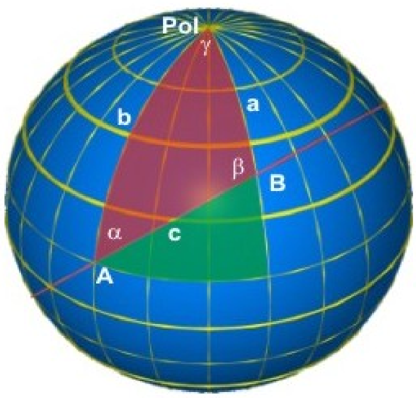
- $$\lambda = 2\pi + \arctan\frac{y}{x}, \text{für } x < 0,\ y > 0$$

Aufgaben

1. Berechne die kartesischen Koordinaten von St.Peter-Ording (54,3 Grad Breite; 8,64Grad östl. Länge).
2. Berechne die kartesischen Koordinaten von Hamburg und New York.
3. Informiere Dich über das UTM-System (*Universal Transverse Mercator).*

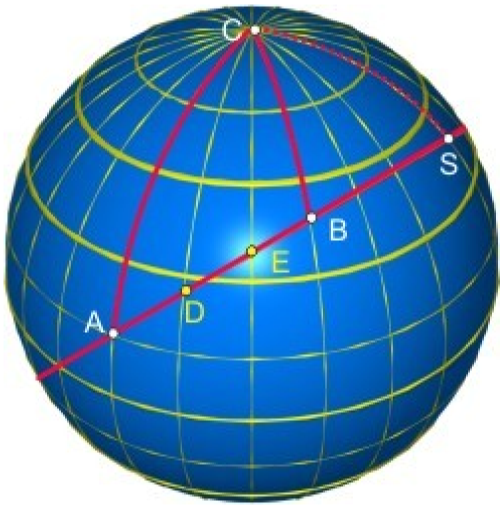
Poldreieck

Das Poldreieck hat den Pol des Kugelkoordinatensystems als eine seiner Ecken. Daraus folgt, dass zwei seiner Seiten Meridiane sind, die den Äquator im rechten Winkel schneiden.



Der Dreieckswinkel $\angle APB = \gamma$ am Pol (er liegt der Seite c gegenüber) ergibt sich einfach aus der Längen(grad)differenz der Punkte A und B. (Denn verlängert man die Seiten auf den Meridianen bis zum Äquator, ändert sich der Winkel γ nicht) Mit dem Hilfsdreieck (hier grün), dessen eine Kathete parallel zum Äquator liegt, sind die Berechnungen aller Seiten und Winkel möglich. Diese Kathete des grünen Dreiecks ist gleichzeitig eine Seite des gleichschenkligen Dreiecks mit dem Pol als der gegenüberliegenden Ecke. Die andere Kathete ist der Komplementärwinkel der Breite φ_B, bzw. die Breiten(grad)differenz φ_A-φ_B der beiden Punkte A und B.

Die Orthodrome



Die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten A und B auf der Kugel liegt auf einem Großkreis. Die Fahrt auf der Orthodrome ist also die kürzeste Route von A nach B. Dieser Großkreis — sofern er nicht der Äquator oder ein Breitenkreis ist — schneidet jeden Meridian unter einem anderen Winkel. Das hat den Nachteil, dass man ständig den Kurs wechseln muss.
Mit dem Pol bilden die beiden Punkte A und B ein — in aller Regel schiefwinkliges — sphärisches (Pol-)Dreieck ABC, denn die Punkte A und B liegen auf Meridianen. Wenn man die Koordinaten der Punkte A und B kennt, sind die Seiten a und b bekannt und der eingeschlossene Winkel γ (das ist der Längenunterschied von A und B) gegeben, und die Seite c und die Winkel α und β sind gesucht. Die Seite c kann nach der Formel

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$$

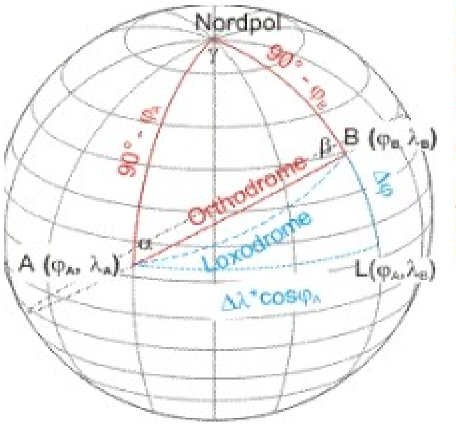
berechnet werden.
Die Winkel berechnet man im schiefwinkligen sphärischen Dreieck:

- $\cos \alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$
- $\cos \beta = \dfrac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$
-

Wenn man also von A nach B segeln will, sind der Startkurs α und der Ankunftskurs β bekannt.

Beispiel einer Kursbestimmung

Um auf der kürzesten Verbindungslinie von A nach B zu kommen, muss man sich auf der Kugel auf einem Großkreis bewegen. Für Segler hat das den Nachteil, dass der Großkreis jeden Meridian unter einem anderen Winkel schneidet, man also den Kurs kontinuierlich ändern muss im Gegensatz zu einer **Loxodrome**, bei der man einen konstanten Kurs fährt.



$$\cos c = \sin \varphi A \cdot \sin \varphi B + \cos \varphi A \cdot \cos \varphi B \cdot \cos (\lambda A - \lambda B)$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{\sin\varphi_B - \sin\varphi_A \cdot \cos c}{\cos\varphi_A \cdot \sin c}$$

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} = \frac{\sin\varphi_A - \sin\varphi_B \cdot \cos c}{\cos\varphi_B \cdot \sin c}$$

Beispiel:

Die Fahrt soll von **Porto in Portugal**

- φ_{Porto} = 41°09′28,0″N = 41,1578°,
- λ_{Porto} = 008°38'W = -8,6333°
- (südliche Breiten und westliche Längen werden negativ angegeben)

nach **Port of Spain auf Trinidad**

- φ_{PoS} = 10°40′19,9″N = 10,6722°,
- λ_{PoS} = 061°32′W = -61,5333°

gehen.

Die **Entfernung** c beträgt
cos c = sin φPorto · sin φPoS + cos φPorto · cos φPoS · cos (λPorto - λPoS) =
= sin 41,1578° · sin 10,6722° + cos 41,1578° · cos 10,6722° · cos (-8,6333° - (-61,5333°)) =
= 0,6581 · 0,1852 + 0,7529 · 0,9827 · 0,6032 = 0,1219 + 0,4463 = 0,5678.
⇒ c = 55,4° = 3323′ = 3.323 sm.

Der **Startkurs** in Porto ergibt sich aus der Berechnung:

$$\cos\beta = \frac{\sin\varphi_{PoS} - \sin\varphi_{Porto} \cdot \cos c}{\cos\varphi_{Porto} \cdot \sin c}$$

oder linearisiert:

- $\cos\beta=[\sin\varphi_{PoS}-\sin\varphi_{Porto}\cdot\cos c]/\cos\varphi_{Porto}\cdot\sin c=$
- $=[\sin 10{,}6722°-\sin 41{,}1578°\cdot 0{,}4618]/\cos 41{,}1578° \cdot \sin 55{,}4° =$
- $=[0{,}1852 - 0{,}6581 \cdot 0{,}5678]/0{,}7529 \cdot 0{,}8231 =$
- $=-0{,}1888/0{,}6197=-0{,}3042$
- $\Rightarrow\beta=107{,}71°$

Das Ergebnis ist β = 108°. Den Startkurs (relativ zur Nordrichtung) erhält man offensichtlich, wenn man den Dreieckswinkel von 360° abzieht: Startkurs = 360° - 108° = 252°.

Und der Ankunftskurs in Port of Spain wird berechnet aus der Formel:

$$\cos\alpha = \frac{\sin\varphi_{Porto} - \sin\varphi_{PoS}\cdot\cos c}{\cos\varphi_{PoS}\cdot\sin c}$$

Das Ergebnis ist α = 46,87°; der navigatorische Sachverstand sagt einem: der Steuerkurs ergibt sich durch Addition von 180°: Ankunftskurs = 180° + 46,9° = 227°.