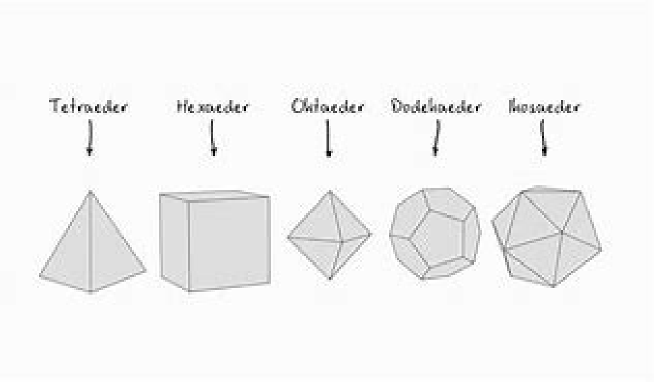
Platonische Körper
(regelmäßige Polyeder)

Platonische Körper sind Polyeder (Vielflächner), deren Begrenzungsflächen regelmäßige Polygone (Vielecke) sind.

Es gibt fünf platonische Körper:



Tetraeder: Vierflach - es wird von 4 gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

Hexaeder: Sechsflach bekannt als Würfel – es wird von sechs Quadraten begrenzt.

Oktaeder: Achtflach – es wird von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

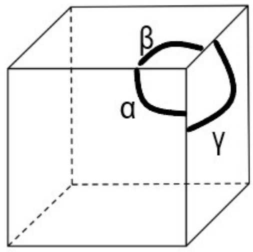
Dodekaeder: Zwölfflach – es wird von zwölf regelmäßigen Fünfecken begrenzt.

Ikosaeder: Zwanzigflach – es wird von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

Warum gibt es genau 5 platonische Körper?

Die Überlegung stammt schon aus dem 3. vorchristlichen Jahrhundert von dem griechischen Mathematiker Euklid.

Wir überlegen, wie groß die Summe der Innenwinkel an einer Ecke des Körpers maximal sein darf. Er muss kleiner als 360° sein!



Im Bild rechts beträgt die Summe der Innenwinkel bei dem Würfel an einer Ecke 270°. Würde die Summe genau 360° betragen, käme keine Ecke mehr zustande, die ‚Ecke' wäre einfach ein Punkt in einer Ebene. Auch bei mehr als 360° wäre keine Ecke möglich.

Außerdem wissen wir: die Summe der Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks beträgt (n-2) ·180° , pro Winkel demnach $\frac{(n-2)}{n} \cdot 180°$.

Daraus folgt, dass für die Begrenzungsflächen regelmäßige nur Drei-, Vier- oder Fünfecke möglich sind, denn es müssen mindestens 3 Flächen an einer Ecken aneinanderstoßen. Bei einem Sechseck wäre die Summe der Innenwinkel dann schon $\frac{(6-2)}{6} \cdot 180° \cdot 3 = 360°$.

Mögliche Fälle sind deshalb:

Polygon	**Innenwinkel**	**Polygone pro Ecke und Eck-Summenwinkel**			
		3	4	5	6
Dreieck	60°	180°/Tetraeder	240°/ Oktaeder	300°/Ikosaeder	360°
Viereck	90°	270°/Hexaeder	360°		
Fünfeck	108°	324°/Dodekaeder	>360°		

Wir haben schon von den die platonischen Körper definierenden Begrenzungsflächen gesprochen.

Je zwei Flächen besitzen eine gemeinsame Kante. (*)

Eine Kante besitzt zwei Endpunkte – die Ecken. (**)

Hier eine Auflistung der Anzahl f der Flächen, der Anzahl e der Ecken sowie der Anzahl k der Kanten eines platonischen Körpers:

	Begrenzungsflächen	f	e	k
Tetraeder	Dreieck	4	4	6
Hexaeder	Viereck	6	8	12
Oktaeder	Dreieck	8	6	12
Dodekaeder	Fünfeck	12	20	30
Ikosaeder	Dreieck	20	12	30

Es besteht ein Zusammenhang zwischen der Anzahl f der Flächen, der Anzahl e der Ecken sowie der Anzahl k der Kanten eines platonischen Körpers.
Dieser Eulersche Formel genannte Zusammenhang lautet:

$$\mathbf{e + f - k = 2}$$

Außerdem kann man sich noch die Gültigkeit der folgenden Gleichung leicht überlegen:

$$\mathbf{m \cdot e = 2 \cdot k = n \cdot f}$$

mit

n : Anzahl der Ecken der Seitenflächen

m: Anzahl der Flächen/Kanten, die an einer Ecke zusammentreffen

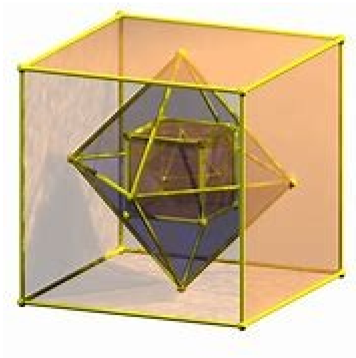
Die Anzahl der Ecken multipliziert mit der Anzahl der an die Ecken stoßenden Kanten muss die doppelte Kantenanzahl ergeben, denn durch das Produkt wird jede Kante doppelt gezählt (s. o. **).
Die Anzahl der Flächen multipliziert mit der Anzahl der Eckpunkte pro Fläche ergibt ebenfalls die doppelte Kantenanzahl, denn durch da Produkt wird jede Kante doppelt gezählt (s. o. *).

Dualität

Bei platonischen Körpern erhält man den Dualkörper, indem man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen miteinander verbindet.

Zueinander dual sind:

Hexaeder und Oktaeder
Dodekaeder und Ikosaeder
Tetraeder zu sich selbst.



Aufgabe:

Zeichne einen Würfel. Verbinde die Mittelpunkte der Seitenflächen zu einem Oktaeder: Die Mittelpunkte der Seitenflächen des Oktaeders können wieder zu einem Würfel verbunden werden (s. Bild).

Tipp: Nicht die ‚üblichen' Verzerrungsparameter verwenden.