

## Übungsaufgaben

1. a) Berechnen Sie:  $\int_{-2}^2 (3x^2 - 4e^x) dx$        $\int_0^{13} \sqrt[3]{2x+1} dx$        $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- b) Geben Sie eine Stammfunktion an:  $\int 4x(x^2 - 5)^4 dx$        $\int \frac{-2}{\sqrt{4-x^2}} dx$        $\int xe^{2x} dx$ .
- c) Geben Sie die 1. Ableitung an:  $f_1(x) = 4e^{2x}$ ;  $f_2(x) = 3^{4x}$ ;  $f_3(x) = x \ln(2x)$ .
- d) Bestimmen Sie eine Stammfunktion  $F$  von  $f(x) = e^{2x-1}$ , so dass  $F(0) = 4e$  ist. Geben Sie eine Umkehrfunktion von  $f$  an.
3. Kaminbesitzer W. ist die ständig steigenden Kosten für Holz leid. Er proklamiert die Energieautarkie für sich. Um dieses Ziel zu erreichen, kauft er einen jungen Wald. Er schätzt den momentanen Holzbestand auf 50 rm. Der Holzbestand erhöht sich jährlich um 8%.
- a) Geben Sie die Wachstumsfunktion an. Mit welchem Holzbestand kann er nach 3 Jahren rechnen?
- b) Ökologe W. plant, seinen Wald nachhaltig zu bewirtschaften. Er lässt deshalb den Wald zunächst in Ruhe wachsen und will anschließend nur so viel Holz dem Wald entnehmen wie auch wieder nachwächst. Er möchte sein Haus ausschließlich mit Holz heizen und kauft dafür eine Holzheizung (ein Heizkamin hat einen viel zu geringen Wirkungsgrad von 50%!). Er rechnet mit einem Wirkungsgrad von 80% (auch wenn die Herstellerfirma 95% verspricht – im Idealfall). Sein Wärmebedarf liegt bei 16000 kWh pro Jahr. Ein Raummeter Holz (bei 15% Restfeuchte) besitzt einen Heizwert von 2MWh/rm. Wann kann W. endlich sein Holz nachhaltig seinem eigenen Wald entnehmen?
4. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen  $f(x) = e^x$  und  $g(x) = \ln x$  in ein Koordinatensystem und erläutern Sie anhand der Graphen, warum  $f$  und  $g$  Umkehrfunktionen zueinander sind.

5. Die Funktion  $f$  hat die Funktionsgleichung  $f(x) = -6e^{-0.5x} + 6e^{-3x} + 6$ .

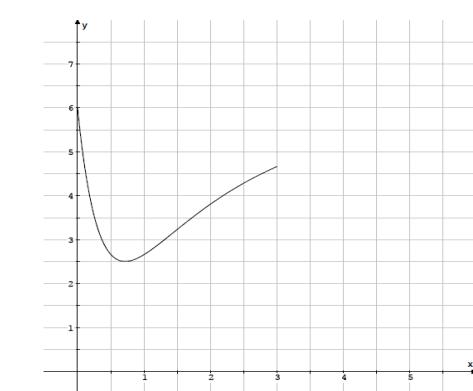
Für einen Teil des Definitionsbereichs ist der Graph der Funktion gegeben:

- a) Der Funktionsterm ist die Summe von drei Termen, zwei mit positivem Vorzeichen, einem mit negativem Vorzeichen. Beschreiben Sie, ausgehend vom Graphen, das Verhalten der Funktion im Hinblick auf folgende Fragen:

Wie arbeiten die drei Terme für den Funktionswert bei  $x = 0$  zusammen?

Warum bestimmt der Term 6 das Verhalten der Funktion für große  $x$ ?

- b) Untersuchen Sie die Funktion  $f$  auf Extrempunkte und Wendestellen.



Eine Situation, für die diese Funktion ein Modell liefern könnte, ist folgende:

In einer Kleinstadt hat der einzige große industrielle Arbeitgeber sein Werk geschlossen. Daraufhin ziehen viele qualifizierte Arbeitskräfte mit ihren Familien aus dieser Kleinstadt weg. Die Politiker versuchen durch Schaffung von Arbeitsplätzen in anderen Bereichen langfristig neue Bewohner zu gewinnen. Es dauert allerdings eine gewisse Zeit, bis diese Maßnahme erste Erfolge zeigt.

Die Statistiker tragen die Einwohnerzahl regelmäßig in eine Grafik ein, wobei die Einteilung der  $x$ -Achse in Jahrzehnten erfolgt und die der  $y$ -Achse in zehntausend Einwohner.

- c) Interpretieren Sie die Bedeutung des Extremwertes und die Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang der Aufgabe.
- d) Bestimmen Sie das Integral von  $f$  über dem Intervall  $[0; 1,5]$ .  
[mögliche Lösung:  $F(x) = 12e^{-0.5x} - 2e^{-3x} + 6x$  ]

Mit diesem Wert sollen Sie folgende Aufgabe bearbeiten:

15 Jahre nach der Werkschließung konnte die Stadt Fördergelder beantragen. Diese richteten sich nach der durchschnittlichen Einwohnerzahl (auf Tausend gerundet) der Stadt in diesen 15 Jahren. Bestimmen Sie die Höhe der Fördermittel, die die Stadt damals erhielt, wenn es für jeden Einwohner 1000 Euro an Fördergeldern gab.

- e) Skizzieren Sie den weiteren Verlauf des Graphen (s. Skizze) und geben Sie unter der Bedingung, dass sie weiterhin der Funktion  $f$  genügt, eine begründete Prognose über die weitere Entwicklung der Einwohnerzahl ab.

