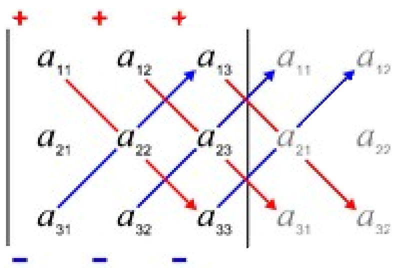
# Determinanten

## Definition

Eine Determinante ist eine Zahl (also ein Skalar), die durch ein Zahlenschema bestehend aus n Zeilen und n Spalten dargestellt wird. Aus diesem Zahlenschema (eine n x n - Matrix) lässt sich der Wert berechnen.
Übliche Schreibweisen: det A oder $|A|$ ; A ist die n x n – Matrix.

Für n=2 (demnach eine 2er Determinante) gilt: $det\ A=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

Für n=3 kann man die Regel von Sarrus anwenden:
Man addiert die Produkte der Hauptdiagonalen (rot) und subtrahiert davon die Produkte der Nebendiagonalen (blau).




Die erste und zweite Spalte sind rechts neben die Determinante notiert, um die Diagonalen besser sichtbar zu machen.

Man erhält: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$

Man kann man auch eine rekursive Berechnung angeben (Laplacescher Entwicklungssatz), indem man eine Determinante nach einer Zeile oder Spalte entwickelt.
Dazu bildet man das Produkt aus einem Zeilenelement und der Untermatrix, die durch Streichung der entsprechenden Zeile und Spalte entsteht. Diese Produkte werden alternierend addiert bzw. subtrahiert. Ein Beispiel Entwicklung nach der ersten Spalte):

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & \square & \square \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & \square & \square \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ Hier die entsprechenden genannten alternierenden Vorzeichen.

Und formal: $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, det \, A_{ij}$ mit $A_{ij}$ ist entsprechende Unterdeterminante.

Ein Beispiel für die Entwicklung einer Dreierdeterminante nach der ersten Zeile:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-22) - 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 6 = 106$$

## Rechengesetze

1. Besteht eine Reihe oder Spalte aus Nullen, ist die Determinante 0.
2. Sind zwei Spalten (Zeilen) gleich, ist die Determinante 0.
3. Vertauscht man zwei Spalten (Zeilen), so ändert eine Determinante ihr Vorzeichen.
4. $v_i$ seien Spalten-(Zeilen-)vektoren einer n x n - Matrix.

   Sei c eine Zahl und w ein Spalten(Zeilen)vektor, dann gilt:

   $$\det (c \cdot v_1, v_2, \dots, v_n) = c \cdot \det (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

   $$\det (v_1 + w, v_2, \dots, v_n) = \det (v_1, v_2, \dots, v_n) + \det (w, v_2, \dots, v_n).$$

5. Addiert man das Vielfache einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte), ändert sich der Wert der Determinante nicht.

**Für Matrizen:**

6. Vertauscht man die Rollen der Zeilen und Spalten (man spricht von einer transponierten oder gestürzten Matrix $A^T$), ändert sich der Wert der Determinante nicht: $\det (A^T) = \det A$.
7. Für eine Dreiecksmatrix A (alle Einträge unterhalb oder oberhalb der Hauptdiagonalen sind Null) gilt: $\det A = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

8. Existiert die zu A inverse Matrix $A^{-1}$, dann gilt: det $A^{-1} = \frac{1}{det\ A}$. Die inverse Matrix $A^{-1}$ existiert genau dann, wenn die det A ≠ 0 gilt.

9. Das Produkt der Matrizen A und B sei A·B.

dann gilt: det (A·B) = det A · det B.

# Anwendungen

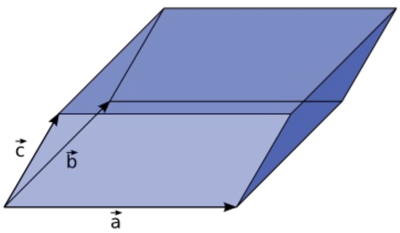
## 1. Volumenbestimmungen

det ($v_1$,$v_2$, … ,$v_n$) ist das (orientierte) *Volumen* (*Flächeninhalt* im Fall n=2) des von den Vektoren $v_1$,$v_2$, …,$v_n$ aufgespannten Polytopes (Parallelogramm).

### Beispiele:

Sind in $R^2$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$, dann ist der Flächeninhalt A des durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms |det ($\vec{a}$,$\vec{b}$) | = | $\begin{vmatrix}3 & 4\\2 & -2\end{vmatrix}$ | =|-6-8| = 14 FE (Flächeneinheiten).

Entsprechend lässt sich das Volumen des durch die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ , $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ aufgespannten Spates einfach durch




|det($\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$)| = | $\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\3 & 0 & 3\\-1 & 1 & 5\end{vmatrix}$| = |-75 | = 75 VE (Volumeneinheiten) berechnen.

Das entspricht dem Betrag des Spatprodukts | $\vec{a}$ · ($\vec{b}$ x $\vec{c}$)| .

## 2. Lineare Gleichungssysteme (Cramersche Regel)

Für ein lineares Gleichungssystem

$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$\ldots \qquad (*)$$

$$a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n$$

lässt sich mit Hilfe der Determinanten eine eindeutige Lösung angeben, wenn sie existiert.

Man bildet die Nennerdeterminante N = $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ aus den Koeffizienten $a_{ij}$ vor den Variablen $x_i$ .

Um eine Lösung für die Variable $x_i$ zu bestimmen, bildet man die Zählerdeterminante $Z_i$ , indem die Koeffizienten der i. Spalte der Nennerdeterminante durch die Koeffizienten $b_1$ bis $b_n$ ersetzt werden.

$Z_i$ = $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & b_{\mathrm{ni}} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ . Dann ist $x_i = \frac{Z_i}{N}$ falls N ≠ 0.

Sonderfälle: Ist die Nennerdeterminante Null, ist das lineare Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar. Ist zumindest eine Zählerdeterminante ungleich Null, existiert keine Lösung, ansonsten gibt es unendlich viele Lösungen.

Ein Beispiel:

$$2 x_1 + 3 x_2 + 5 x_3 = 4$$

$$3 x_1 - x_2 + 2 x_3 = 1$$

$$2 x_1 - x_3 = 6$$

Dann ist die Nennerdeterminante N = $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ = 33.

Die Zählerdeterminanten:

$Z_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 73.$ Also ist $x_1 = \frac{73}{33}$.

$Z_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 82.$ Also ist $x_2 = \frac{82}{33}$.

$Z_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -52.$ Also ist $x_3 = -\frac{52}{33}$.

**Beweis der Cramerschen Regel:**

Für n=2 kann man einigermaßen übersichtlich mit Hilfe des Additionsverfahrens Lösungen des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit der Koeffizienten bestimmen. Dies führt zu den Rechentermen der Determinanten.

Ein allgemeiner Beweis verwendet die Rechenregeln 2 und 4 (s. oben):

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Lösungsvektor und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ nach (*).

Dann kann man das lineare Gleichungssystem (*) mit der Matrizenmultiplikation (s. unten) schreiben: $A \cdot x = b$ (**)

oder ausführlicher $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$

Sei $A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ die Matrix, in der die i. Spalte durch b ersetzt wird.

Dann ist

$$\det A_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & x_1 a_{11}+\dots+x_n a_{1n} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & x_1 a_{n1}+\dots+x_n a_{nn} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ (dann Rechengesetz 4)}$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + x_i \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + x_n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= x_1 \cdot 0 + \dots + x_i \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + x_n \cdot 0 \quad \text{(Rechengesetz 2 )}$$

$= x_i \cdot \det A$

Daraus folgt dann $x_i = \frac{det\ A_i}{det\ A}$ falls det A ≠ 0 ist,

das Gleichungssystem demnach eindeutig lösbar ist.

Leider hat das Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Hilfe der Determinanten die unschöne Eigenschaft, dass der Rechenaufwand (man betrachtet nur Multiplikationen) allein für eine Determinante mit n! steigt, denn man muss n-1 Unterdeterminanten berechnen und jeweils mit einem Wert multiplizieren.
Also ist es nur für kleine n (also bis ungefähr n=10) praktisch anwendbar. Vorteile bestehen in der Einfachheit der Berechnung und darin, dass Rundungsfehler durch Divisionen praktisch nicht auftreten und.
Das Standardlösungsverfahren ist deshalb das Gaußsche Eliminationsverfahren, dessen Rechenaufwand ungefähr nur mit $n^3$ steigt **(Fußnote 1)**. Man muss allerdings eine Pivotisierung anwenden, um Rundungsfehler zu vermeiden.

**Verallgemeinerung: m x n –Matrizen**

Transponierte Determinante $A^T$ : Zeilen und Spalten vertauschen

Man kann eine Multiplikation von einer m x n – Matrix und einer n x k – Matrix definieren. Man erhält dann eine m x k – Matrix:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} b_{11} & ... & b_{1k} \\ ... & ... & ... \\ b_{n1} & ... & b_{nk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & ... & c_{1k} \\ ... & ... & ... \\ c_{m1} & ... & c_{mk} \end{vmatrix}$$

Den Koeffizienten $c_{ij}$ der Ergebnismatrix erhält man als Summe der Produkte der Koeffizienten der i.Zeile der ersten Matrix mit den Koeffizienten der j. Spalte der 2. Matrix. In der angegebenen Nomenklatur besteht diese Summe demnach aus n Summanden: $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$.

**Fußnote 1:**

Um die erweiterte Matrix eines linearen Gleichungssystems auf eine Diagonalform zu bringen, müssen in n-1 Zeilen jeweils n Multiplikationen durchgeführt werden, um in einer Spalte Nullen zu erzeugen. Das muss für jede der n Spalten erfolgen. Daraus folgt $\sim n^3$ Multiplikationen