Fachbegriffe Matrizen

Symmetrische Matrix

Eine (quadratische) Matrix ist symmetrisch, wenn sich ihre Elemente an der Hauptdiagonalen spiegeln lassen: $(a_{ij}) = (a_{ji})$

Beispiel: A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

transponierte Matrix

Eine zu der Matrix A transponierte Matrix A^T entsteht durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten.

Sei A eine nxm – Matrix: A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$

Dann ist A^T eine mxn – Matrix mit A^T = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$

Beispiel: A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ und damit A^T = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

adjungierte Matrix

Eine zu der Matrix A adjungierte Matrix A^H entsteht durch die Vertauschung von Zeilen und Spalten (wie bei der transponierten Matrix) sowie einer anschließenden Konjugation der Elemente.

Zur Erinnerung: Sei z eine komplexe Zahl (also $z \in C$) mit $z = a + b \cdot i$, $a,b \in R$

Dann ist die zu z konjugierte Zahl $\overline{z} = a - b \cdot i$.

Der Begriff adjungiert ist bedeutsam, wenn man die Menge der komplexen Zahlen als Zahlkörper zugrunde legt. Denn für reelle Zahlen ist die

adjungierte Matrix gleich der transponierten Matrix. Sie ist im Reellen symmetrisch.
Anmerkung: Die Kennzeichnung H erfolgt zu Ehren des französischen Mathematikers Charles Hermite.

Sei A eine nxm – Matrix: A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ = (a_{mn})

Dann ist A^H eine mxn – Matrix: A^H = $\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{m1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \dots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix}$ = $(\bar{a}_{nm})$ = $\bar{A}^T$

Beispiel: A = $\begin{pmatrix} 2-3i & 0 & -1 \\ 4i & 1+5i & 6 \end{pmatrix}$ und damit A^H = $\begin{pmatrix} 2+3i & -4i \\ 0 & 1-5i \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

hermitesche Matrix

Eine hermitesche Matrix ist eine quadratische Matrix (also nxn – Matrix), die gleich ihrer adjungierten Matrix ist: A = A^H oder $(a_{mn}) = (\bar{a}_{nm})$ mit $a_{ij} \in C$

Dir Elemente der Hauptdiagonalen sind dann notwendigerweise reell.
Es gilt für hermitesche Matrizen ebenfalls: $A^T = \bar{A}$.
Eine reelle hermitesche Matrix ist symmetrisch.

Beispiel: A = $\begin{pmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-3i & 1 \end{pmatrix}$ ist hermitesch

Adjunkte

Die Adjunkte bezieht sich nur auf nxn – Matrizen. Sie ist nicht zu verwechseln mit der adjungierten Matrix.
Zur Matrix A ist die Adjunkte adj(A) die Transponierte der Kofaktormatrix. Die Kofaktormatrix entsteht durch die vorzeichenbehafteten Unterdeterminanten (Minoren).
Erinnerung: Eine Unterdeterminante entsteht aus der Determinante durch Streichung der jeweiligen Zeile und Spalte.

2x2 – Matrix: A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ adj(A) = $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T$ = $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3x3 – Matrix: A = $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ adj(A) = $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$

$$= \begin{pmatrix} ei-fh & fg-di & dh-eg \\ ch-bi & ai-cg & bg-ah \\ bf-ce & cd-af & ae-bd \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{pmatrix}$$

Adjunkte können beispielsweise bei der Bestimmung einer inversen Matrix angewendet werden.

Definitheit

Der Begriff der Definitheit bezieht sich eigentlich auf Bilinearformen (speziell Skalarprodukte) – also Abbildungen des R^n auf sich (s. auch unter Matrizen→Beschreibung). Da eine Bilinearform aber durch eine nxn – Matrix beschrieben werden kann, lässt sich dieser Begriff auch auf nxn – Matrizen übertragen.
x sei ein Vektor des Vektorraums. Dann heißt eine Matrix A

positiv definit,	falls alle Eigenwerte größer als Null sind bzw. $x^T A x > 0$
negativ definit,	falls alle Eigenwerte kleiner als Null sind bzw. $x^T A x < 0$
indefinit,	falls positive und negative Eigenwerte existieren
pos. semidefinit,	falls alle Eigenwerte größer oder gleich Null sind bzw. $x^T A x \geq 0$
neg. semidefinit,	falls alle Eigenwerte kleiner oder gleich Null sind bzw. $x^T A x \leq 0$

Anmerkung: Eine symmetrische Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn alle führenden Hauptminoren (Unterdeterminanten) größer als Null sind. Sie ist negativ definit *genau dann, wenn -A positiv definit ist. Daraus folgt, dass dann alle gerade Hauptminoren positiv sind und alle ungeraden negativ.*

Eigenvektor – Eigenwert

Eine nxn – Matrix A kann als Abbildung des R^n in sich aufgefasst werden:

$A: R^n \rightarrow R^n$.

Eigentlich müsste man immer die zugrunde liegende Basis des Vektorraums benennen. Sie ergibt sich gewöhnlich aus dem Kontext. Üblicherweise ist es die Standardbasis.

Ein Eigenvektor $\vec{v}$ ist ein Vektor, der unter der Abbildung seine Richtung nicht verändert. Er wird höchstens gestreckt.

Der Streckfaktor entspricht dem Eigenwert λ zum Eigenvektor $\vec{v}$: $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$.

$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \rightarrow (A - \lambda E)\,\vec{v} = \vec{0}$ mit E: Einheitsmatrix

$(A - \lambda E)$ heißt modifizierte Matrix

Die Lösung der Gleichung $(A - \lambda E)\,\vec{v} = \vec{0}$ ist der Kern der modifizierten Matrix. Die Eigenvektoren bilden demnach den Kern der modifizierten Matrix mit den Eigenwerten λ_i. Kern: Menge der Vektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden.

$\vec{v} \neq \vec{0}$ wird vorausgesetzt (wäre triviale Lösung).

Um die Gleichung $(A - \lambda E)\,\vec{v} = \vec{0}$ zu lösen, muss die Determinante der modifizierten Matrix Null gesetzt werden: det $(A - \lambda E) = 0$.

Das sich durch det $(A - \lambda E)$ ergebende Polynom heißt charakteristisches Polynom. Sein Grad entspricht der Dimension des Vektorraums.

Vorgehensweise für die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren:

1. Eigenwerte λ_i bestimmen als die Nullstellen des charakteristischen Polynoms
2. Eigenvektoren bestimmen, indem man jeden Eigenwert λ in die modifizierte Matrix einsetzt und das zum Eigenwert gehörige Gleichungssystem löst: $(A - \lambda E)\,\vec{v} = \vec{0}$
   $\vec{v}$ ist der zu λ gehörige Eigenvektor. Wenn $\vec{v}$ ein Eigenvektor ist, so natürlich auch $k \cdot \vec{v}$ (k Element des zugrundeliegenden Körpers).

Die Eigenwerte sind reell. Die zugehörigen Eigenwerte paarweise orthogonal.

Anwendung finden diese Begriffe hauptsächlich für hermitesche Matrizen (s. oben).
Beispielsweise geht man beim Diagonalisieren von Matrizen zu einer Basis aus Eigenvektoren über. In dieser Basis kann die durch A beschriebene Abbildung durch eine Diagonalmatrix dargestellt werden (s. Matrix → Beschreibung). Aber nicht jede Matrix ist diagonalisierbar. Dazu müssen die n Eigenwerte paarweise verschieden sein.

Beispiele:

1. Sei A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (A nicht hermitesch)

Dann det $(A - \lambda E)$ = $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(3 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) - (-1) \cdot 0 = 0 \quad \to \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\to \quad \lambda_1 = 3$ oder $\lambda_2 = 2$

Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 5\lambda + 6$.

Weiter: $\lambda_1 = 3$ einsetzen

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 0 \\ -1 & 2-3 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

→ Gleichungssystem I. $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$

II. $(-1) \cdot x + (-1) \cdot y = 0 \to x = -y$

Setze $x = 1 \to y = -1$

und der zu $\lambda_1 = 3$ gehörige Eigenvektor ist $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$ einsetzen

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 0 \\ -1 & 2-2 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

→ Gleichungssystem I. $1 \cdot x + 0 \cdot y = 0$

II. $(-1) \cdot x + 0 \cdot y = 0 \to x = 0$, y beliebig

$x = 0$, setze $y = 1$

und der zu $\lambda_2 = 2$ gehörige Eigenvektor ist $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Anmerkung: Die Matrix ist diagonalisierbar (ausführliche Rechnung in Beispiel 2)

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sei A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ (A hermitesch)

Dann det $(A - \lambda E)$ = $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 10-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Das char. Polynom wird hier mit der Regel von Sarrus bestimmt:

$(2-\lambda)\cdot(10-\lambda)\cdot(5-\lambda) + 4 + 4 - 4\cdot(10-\lambda) - 4\cdot(2-\lambda) - 1\cdot(5-\lambda) = 0$

$-\lambda^3 + 17\lambda^2 - 71\lambda + 55 = 0$

Durch Raten findet man $\lambda_1 = 1$.

Eine Polynomdivision ergibt

$$-\lambda^3 + 17\lambda^2 - 71\lambda + 55 = -(\lambda - 1)\cdot(\lambda^2 - 16\lambda + 55)$$

und weiter $= -(\lambda - 1)\cdot(\lambda - 5)\cdot(\lambda - 11)$

Die Eigenwerte lauten demnach: $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 5$ $\lambda_3 = 11$

Nun wird jeder Eigenwert in die modifizierte Matrix eingesetzt und der zugehörige Eigenvektor durch Lösen des entstehenden Gleichungssystems bestimmt:

Für $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 & 2 \\ -1 & 10-1 & -2 \\ 2 & -2 & 5-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ I. $x - y + 2z = 0$

II. $-x + 9y - 2z = 0$ Man erkennt hier: III = 2 · I

III. $2x - 2y + 4z = 0$

Setze x = 1

I'. $1 - y + 2z = 0$

II'. $-1 + 9y - 2z = 0$

Aus I' + II' folgt:

$8y = 0 \rightarrow y = 0$

Aus Einsetzen in I'

$z = -0.5$

Insgesamt erhält man den Eigenvektor $\vec{v}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

besser: Durch Multiplikation mit 2 erhält man $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Anmerkung: Im Allgemeinen kann man den Gauß-Algorithmus zur Lösung des Gleichungssystems verwenden. Es sollte ein eindimensionaler Lösungsraum entstehen.

Für $\lambda_2 = 5$ erhält man auf die gleiche Weise den Eigenvektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

und für $\lambda_3 = 11$ den Eigenvektor $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Die Eigenwerte sind alle verschieden. Deshalb ist die Matrix diagonalisierbar. Wie auch unter <Matrix→Beschreibung> erwähnt, lässt sich die Matrix A darstellen durch $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$.
S ist dabei die Übergangsmatrix von der Standardbasis (die zu A gehört) zur Basis der Eigenvektoren, S^{-1} die zu ihr inverse Matrix- also die Übergangsmatrix von den Eigenvektoren zur Standardbasis.
S wird durch die Eigenvektoren dargestellt:

$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ und $S^{-1} = -\frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -12 & 0 & 6 \\ -5 & -5 & -10 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

D ist die Diagonalmatrix bestehend aus den Eigenwerten: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

Insgesamt: $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot \begin{pmatrix} -12 & 0 & 6 \\ -5 & -5 & -10 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix

Sei f eine Funktion, die den R^n in den R^m abbildet:

f: $R^n \rightarrow R^m$ - also $f = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$.

Betrachtet man nun die partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen f_i nach jeder Variablen und ordnet sie als Matrix an, erhält man die sogenannte Jacobi-Matrix J_f . Für n = m = 3 hat sie die Form:

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x} & \frac{\delta f_1}{\delta y} & \frac{\delta f_1}{\delta z} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x} & \frac{\delta f_2}{\delta y} & \frac{\delta f_2}{\delta z} \\ \frac{\delta f_3}{\delta x} & \frac{\delta f_3}{\delta y} & \frac{\delta f_3}{\delta z} \end{pmatrix} = \nabla f = grad \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \text{grad f}$$

Dies ist der sogenannte Vektorgradient (s. auch Physik → Verschiedenes → grad-div-rot

Hesse-Matrix

Sei f eine mehrdimensionale Funktion f: $R^n \to R$
Dann ist die Hesse-Matrix das Analogon zur 2. Ableitung einer eindimensionalen Funktion.
Für die Dimension n = 3 ist die Hesse-Matrix:

$$H_f = \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta y_j} \right)_{i,j=1..3} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta x} & \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} & \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta z} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} & \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta y} & \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta z} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta z \delta x} & \frac{\delta^2 f}{\delta z \delta y} & \frac{\delta^2 f}{\delta z \delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}.$$

Es gilt für beliebige x,y: $f_{xy} = f_{yx}$. Damit ist die Hesse-Matrix symmetrisch.
Der Nabla-Operator wird hier auf die 1. Ableitung der Funktion f, die ja eine Vektorfunktion ist, angewendet. Die Hesse-Matrix ist damit die Jacobi-Matrix der 1. Ableitung.