Matrizen

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen. Sie besteht aus Zeilen und Spalten. Um eine Matrix von einer Determinante zu unterscheiden, verwendet man als seitliche Begrenzungen runde Klammern anstatt wie bei der Determinante senkrechte Striche.
Bei einer Determinante sind die Anzahlen von Zeilen und Spalten gleich. Sie repräsentiert eine Zahl. Eine Matrix kann unterschiedliche Anzahlen von Zeilen und Spalten besitzen. Ihre Bedeutung erschließt sich erst aus dem Kontext.
Man spricht von einer m x n – Matrix (sprich: m kreuz n Matrix). Sie besteht aus m Zeilen und n Spalten. Beispiel: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

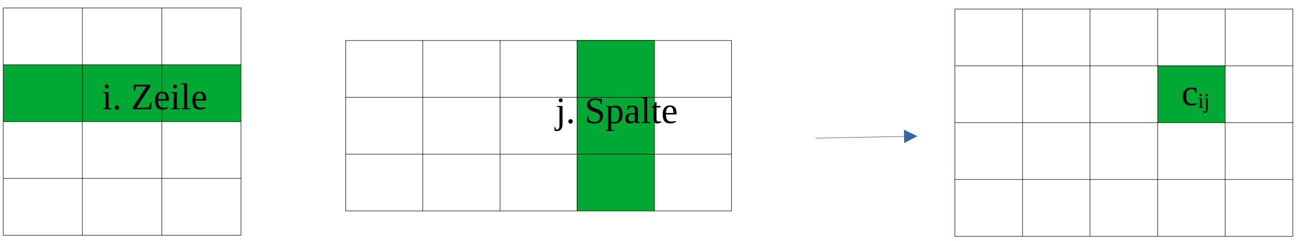
Auf Matrizen ist eine Multiplikation definiert. Voraussetzung ist, dass die Anzahl der Spalten der 1. Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der 2. Matrix ist. Daraus lässt sich schon schließen, dass diese Verknüpfung nicht kommutativ ist.

Eine (l x m) – Matrix verknüpft mit einer (m x n)-Matrix ergibt eine (l x n)- Matrix:

$$M^{l \times m} \times M^{m \times n} \rightarrow M^{l \times n}$$

Das Element c_{ij} der Ergebnismatrix ist die Summe der Produkte der Elemente der i.Zeile der 1. Matrix und der j. Spalte der 2. Matrix:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$



Kurzform: Zeile mal Spalte

$$\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1m} \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{l1}\, a_{l2} \ldots a_{lm} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{11} \ldots b_{1n} \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ b_{m1} \ldots b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}\, c_{12} \ldots c_{1n} \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ c_{m1}\, c_{m2} \ldots c_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3+(-2)\cdot 5 & 2\cdot 3+(-2)\cdot(-4) \\ 3\cdot 3+4\cdot 5 & 3\cdot 3+4\cdot(-4) \\ 1\cdot 3+2\cdot 5 & 1\cdot 3+2\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ 29 & -7 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$

Anmerkung: Man kann auch eine reelle Zahl r mit einer Matrix A verknüpfen.

Dann gilt: $r \cdot A = r \cdot \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1m} \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot a_{11}\; r\cdot a_{12} \ldots r\cdot a_{1m} \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ r\cdot a_{n1}\; r\cdot a_{n2} \ldots r\cdot a_{nm} \end{pmatrix}$.

Ist A eine nxn-Matrix, gilt weiterhin: $\det(r\cdot A) = r^n \cdot \det(A)$.

Wofür braucht man das?

1. Häufig verwendet man Matrizen, um den Übergang von einem Zustand in einen neuen Zustand zu beschreiben.
Um zum Beispiel eine Drehung bzgl des Ursprungs um einen Winkel α eines Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in der Ebene durchzuführen, kann die Drehmatrix D = $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ verwendet werden.
Die Koordinaten des um den Winkel α gedrehten Vektors erhält man mit

$$\vec{x}_{neu} = D\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot x - \sin\alpha\cdot y \\ \sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Um den Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ um α = 90° zu drehen, rechnet man:

$$\vec{v_{neu}}=D\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}\cos 90° & -\sin 90°\\ \sin 90° & \cos 90°\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 1-1\cdot 0\\ 1\cdot 1+0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Anmerkung: Die Determinante der Drehmatrix beträgt 1 (mit Satz des Pythagoras in trigonometrischer Form), deshalb ändert sich natürlich der Abstand des Bildpunktes zum Ursprung nicht.

2. Übergangsmatrizen 1 (affine KO-Systeme)

Es kann in bestimmten Anwendungen sinnvoll sein, eine andere als die kartesische Basis zu verwenden. Dann kann die Darstellung eines Vektors in einer anderen Basis mit einer Übergangsmatrix (von einer Basis zu einer anderen) berechnet werden.
Dazu werden die Basisvektoren der ursprünglichen Basis durch die Basisvektoren der neuen Basis dargestellt.

Ein Beispiel:
Die ursprüngliche Basis sei die kartesische Basis K mit den Vektoren $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, also K = {$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ }. Die neue Basis B bestehe aus den Vektoren $\vec{b}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, also B = { $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ }.

Nun müssen die Vektoren der ursprünglichen Basis durch die neuen Basisvektoren ausgedrückt werden:

$$\vec{e}_1=x_1\cdot\vec{b}_1+y_1\cdot\vec{b}_2 \quad\rightarrow\quad \begin{matrix}1=x_1\cdot 2+y_1\cdot 1\\ 0=x_1\cdot(-1)+y_1\cdot 3\end{matrix} \quad\rightarrow\quad \begin{matrix}x_1 = 3/7\\ y_1 = 1/7\end{matrix}$$

$$\vec{e}_2=x_2\cdot\vec{b}_1+y_2\cdot\vec{b}_2 \quad\rightarrow\quad \begin{matrix}0=x_2\cdot 2+y_2\cdot 1\\ 1=x_2\cdot(-1)+y_2\cdot 3\end{matrix} \quad\rightarrow\quad \begin{matrix}x_2 = -1/7\\ y_2 = 2/7\end{matrix}$$

Die Übergangsmatrix lautet $\ddot{U}_{K\to B}=\begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$.

Darstellung des Vektors $\vec{v}$ in unterschiedlichen Basen:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}_K=\ddot{U}_{K\to B}\cdot\vec{v}_K=\begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}_{K\to B}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}_K=\begin{pmatrix} 3/7\cdot(-3)+(-1/7)\cdot 5 \\ 1/7\cdot(-3)+2/7\cdot 5 \end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

Der Vektor $\vec{v}$ besitzt eine Darstellung, die abhängig ist von der Basis. Diese muss deshalb angegeben werden. Standardmäßig wird die kartesische Basis verwendet.

Die Übergangsmatrix von B nach K ist trivial:

$$\ddot{U}_{B\to K}=\begin{pmatrix}\vec{b}_1 & \vec{b}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Wiederum $\vec{v}$ als Beispiel:

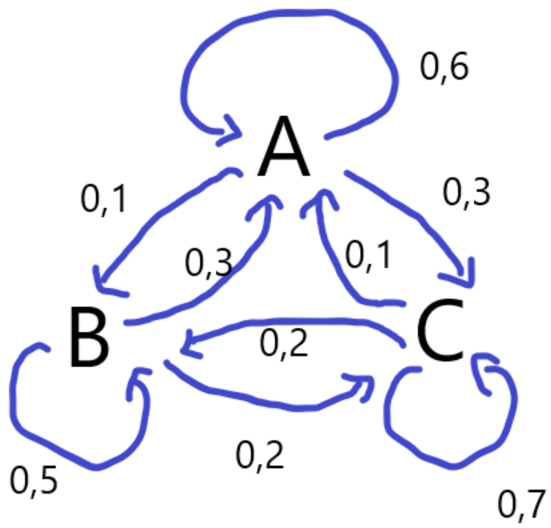
$$\vec{v}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_B=\ddot{U}_{B\to K}\cdot\vec{v}_B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}_{B\to K}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_B=\begin{pmatrix} 2\cdot(-2)+1\cdot 1 \\ (-1)\cdot(-2)+3\cdot 1 \end{pmatrix}_K=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}_K$$

Anmerkung: Übergangsmatrizen sind nxn-Matrizen. Sie sind invertierbar.
Mit E ist die Einheitsmatrix, gilt:
$\ddot{U}_{K\to B}\cdot(\ddot{U}_{B\to K}\cdot\vec{v}_B)=\ddot{U}_{K\to B}\cdot\vec{v}_K=\vec{v}_B=E\cdot\vec{v}_B \quad\rightarrow\quad \ddot{U}_{K\to B}\cdot\ddot{U}_{B\to K}=E$
Eine Übergangsmatrix ist die inverse Matrix der anderen Übergangsmatrix.

3. Übergangsmatrizen 2 (Zustandsänderungen)

Ein Beispiel:

Man betrachte drei Automarken A, B und. Man weiß aus Befragungen, dass Besitzer der Automarke A beim nächsten Kauf zu 60% der Automarke treu bleiben, 10% zu Automarke B wechseln sowie 30% zu C. Besitzer von B bleiben zu 50% der Automarke treu, 30% zu A wechseln und 20% zu C. Besitzer von C bleiben zu 70% der Marke treu, 10% wechseln zu A und 20% zu B.



Daraus entsteht eine Tabelle bzw. eine Übergangsmatrix:

	A	**B**	**C**
A	0,6	0,1	0,3
B	0,3	0,5	0,2
C	0,1	0,2	0,7

Die Übergangsmatrix: $Ü = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

Übergangsmatrizen von einem Zustand zu einem nächsten sind n x n – Matrizen und zeichnen sich dadurch aus, dass jeweils in einer Reihe bzw. einer Spalte die Summe der Einträge 1 ist.
Kennt man nun den Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0, z.B.

$z_0 = \begin{pmatrix} \textit{Besitzer A} \\ \textit{Besitzer B} \\ \textit{Besitzer C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$, lässt sich auf die Verteilung im nächsten Zustand z_1 schließen. Die Zustände wechseln nach einer bestimmten Zeit (z.B. alle 2 Jahre).
Man rechnet einfach

$$z_1 = Ü \cdot z_0 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}36 \\ 0{,}33 \\ 0{,}31 \end{pmatrix}$$

Auf diese Weise lässt sich die Entwicklung der Automarken vorhersagen.

Will man den Zustand nach 8 Jahren (also vier Änderungen) vorhersagen, muss man einfach die Übergangsmatrix potenzieren.:

$$z_4 = Ü \cdot Ü \cdot Ü \cdot Ü \cdot z_0 = Ü^4 \cdot z_0$$

Das Potenzieren von Matrizen ist demzufolge interessant.

Möchte man in anderen Anwendungen einen stabilen Endzustand berechnen, lässt man n gegen unendlich gehen.

Hinweis:

Um derartige Rechnungen zu vereinfachen, diagonalisiert man die
n x n -Übergangsmatrix (nur Einträge in der Hauptdiagonalen).
Diagonalmatrizen lassen sich – wie man sich leicht überlegt – sehr einfach potenzieren.

Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in R$ *und damit*

$$D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

Die Diagonaleinträge sind Eigenwerte. Man benötigt noch die Matrix S, die aus Eigenvektoren besteht sowie deren Umkehrung S^{-1}.

Insgesamt: $Ü^m = S\, D^m\, S^{-1}$

Man nimmt damit einen Basiswechsel zu einer Basis vor, die aus Eigenvektoren besteht und führt in dieser Basis die Potenzierung aus. Dann wird der Basisübergang rückgängig gemacht.

Damit eine Matrix diagonalisierbar ist, müssen deshalb die zugehörigen Eigenvektoren eine Basis bilden. Die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren muss der Dimension des Vektorraums entsprechen.

Die Bestimmung der Eigenvektoren und der Eigenwerte wird an anderer Stelle besprochen.

Für weiterführende Beispiele sei auf die Übungsaufgaben verwiesen, die unter Mathematik → Stufe 13 → Üb-Geometrie abrufbar sind. Die jeweils ersten Aufgaben benötigen Übergangsmatrizen.

4. Skalarprodukt dargestellt durch Matrizen

Die Einführung eines Skalarprodukts auf einen Vektorraum V über einem Körper K ermöglicht bekanntlich die Metrisierung dieses Raums, d.h. man kann Längen, Abstände oder Winkel bestimmen. Der Vektorraum ist häufig der R^n, der Körper K ist dann die Menge der reellen Zahlen. Im R^3 beispielsweise besteht ein Vektor $\vec{a}$ dann aus n=3 Koordinaten: $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, die a_i sind reelle Zahlen.

Ein Skalarprodukt ist eine spezielle Bilinearform. Eine Bilinearform ordnet zwei Vektoren einen Skalar (Zahl) zu. Sie erfüllt die zwei Bedingungen einer linearen Abbildung: Additivität und Homogenität.

Zur Erinnerung die Definition einer Bilinearform

f: $V \times V \rightarrow K$,

Für alle $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}, \vec{y} \in V;\ \lambda, \mu \in K$ *gelten dann*

Additivität: $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = f(\vec{x}_1, \vec{y}) + f(\vec{x}_2, \vec{y})$

$f(\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = f(\vec{x}, \vec{y}_1) + f(\vec{x}, \vec{y}_2)$ *und*

Homogenität: $f(\lambda \cdot \vec{x}, \vec{y}) = \lambda \cdot f(\vec{x}, \vec{y})$

$f(\vec{x}, \vec{y} \cdot \mu) = f(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \mu$

Für ein Skalarprodukt muss die Bilinearform zusätzlich symmetrisch und positiv definit sein:

Symmetrisch: $f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$

Positiv definit: $f(\vec{x}, \vec{x}) > 0 \ ; \ \vec{x} \neq \vec{0}$

Sie kann durch eine n x n - Matrix A dargestellt werden. Aufgrund der Symmetrieeigenschaft ist die Matrix ebenfalls symmetrisch, d.h. sie kann an ihrer Hauptdiagonalen gespiegelt werden.

Bekannt ist das Standardskalarprodukt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot b_i = a_1\cdot b_1 + ... + a_n\cdot b_n$$

Diesem Skalarprodukt lässt sich die Einheitsmatrix $A_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$

zuordnen bzgl der Standardbasis des Vektorraums , also der kartesischen Basis { $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ } mit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, … , $\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dann gilt für die Verknüpfung der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}^T A_E \ \vec{b}$$

Dabei ist $\vec{a}^T$ die Transponierte zu $\vec{a}$, d.h. es werden Zeilen und Spalten des Vektors (oder allgemeiner einer Matrix) getauscht.
Beispiel Standardskalarprodukt 2-dimensional :

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1 , a_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (a_1 , a_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 .$$

s. Matrizenmultiplikation (Zeile x Spalte): (1x2) (2x2) (2x1) = (1x2) (2x1) = (1x1) also Skalar

Hinweis: Nicht jede symmetrische Matrix stellt ein Skalarprodukt dar.

Ein anderes Beispiel: Seien die „Vektoren“ die Menge der quadratischen Funktionen $a(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit a_i reelle

Zahlen. Der „Vektor“ a wird bestimmt durch die Koeffizienten der Funktion, also $a = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$

Eine Basis dieses „Vektorraums“ ist beispielsweise B = $\{x^2 , x , 1\}$.
Ein Skalarprodukt lässt sich definieren durch

$$a \cdot b = \int_0^1 a(x) b(x) dx$$

Man erhält

$$a \cdot b = \int_0^1 a(x) b(x) dx$$

$$= \int_0^1 \left(a_2 b_2 x^4 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) x^3 + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0\right) dx$$

$$= \frac{1}{5} a_2 b_2 + \frac{1}{4}(a_2 b_1 + a_1 b_2) + \frac{1}{3}(a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \frac{1}{2}(a_1 b_0 + a_0 b_1) + a_0 b_0$$

Die zugehörige Matrix A zu diesem Skalarprodukt lautet

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ denn es gilt } a \cdot b = (a_1, a_2, a_3)\ A \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Man erkennt mit Hilfe des Hauptminorenkriteriums, dass diese Abbildung positiv definit ist:

$$\Delta_1 = \frac{1}{5} > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{15} - \frac{1}{16} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{100}{60^3} > 0$$

Hinweis: Die Basisvektoren sind nicht orthogonal, denn beispielsweise gilt für das Skalarprodukt :

$$x^2 \cdot x = \int_0^1 x^2 \cdot x \, dx = \frac{1}{4} \neq 0$$