Mehrdimensionale Funktionen

Vorbemerkungen

Häufig beschränkt man sich bei der Darstellung von Sachverhalten – insbesondere in der Schulphysik - auf eine eindimensionale Schreibweise f(x) , um den zu erarbeitenden Inhalt nicht noch zusätzlich durch mathematischen Ballast aufzuladen.
So werden Wellen vorzugsweise mit einer (Orts-)Variable x für die Ausbreitung (neben einer Zeitabhängigkeit) beschrieben, wohl wissend, dass sich z.B. Wasserwellen (an der Oberfläche) zweidimensional oder elektromagnetische Wellen räumlich (Variablen x, y, z) ausbreiten. Oder im Fall von kugelsymmetrischen Beispielen gelingt durch den Übergang zu Kugelkoordinaten die Ausbreitung durch den Abstand r.
Will man die Beschreibung verallgemeinern auf mehrdimensionale Funktionen $f(x_1,...,x_n)$, verwendet man das Konzept der partiellen Ableitungen.

Hilfreich sind die Begriffe skalare Funktion und Vektorfunktion.

Skalare Funktion und Vektorfunktion

Der Funktionswert einer skalaren Funktion ist eine Zahl, bei einer Vektorfunktion ist es ein Vektor:

skalare Funktion: f: (x, ...) → Zahl
Vektorfunktion: f: (x, ...) → $\vec{v}$

Beispielfunktionen:

skalar: $f(x) = 7\cdot x$ $\quad$ $f((x,y) = 3\cdot x^2 - 7\cdot y$ $\quad$ $f(x,y,z) = z + 2\cdot x^2 - 7\cdot y\cdot z$

Vektorfkt: $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$ $\quad$ $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ y \end{pmatrix}$ $\quad$ $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3xz^2-3 \end{pmatrix}$

Beispielanwendungen:

Das Potential P ist eine skalare Funktion. Man gibt das Potential (bezogen auf einen Bezugspunkt) durch eine Zahl (mit Einheit) an. In einem Raumpunkt (x,y,z) sei das elektrische Potential durch die Funktion $f(x,y,z) = 3x - y + z^2$ gegeben.
Dann ist das Potential im Raumpunkt Q(2/-1/1): $\quad$ f(2,-1,1) = 8 V.

Will man das elektrische Feld $\vec{E}$ in einem Raumpunkt (x_1,y_1,z_1) angeben, benötigt man außer dem Betrag des elektrischen Feldes noch die Angabe der Richtung des elektrischen Feldes. In diese Richtung würde sich eine Probeladung bewegen.

Es sei die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ durch die Funktion f(x,y,z) = $\begin{pmatrix} x \\ y-x \\ x \cdot z \end{pmatrix}$ gegeben.

Dann ist f(2,-1,1) = $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Den Betrag der Feldstärke in dem Punkt erhält man durch den Betrag des Vektors:

$|\vec{E}(2,-1,1)| = \sqrt{2^2+(-3)^2+2^2} = \sqrt{17}\,\frac{N}{C}$.

Die partielle Ableitung

Gegeben sei eine Funktion f, die von zwei Variablen x und y abhängig ist:

Beispiel: . f(x,y) = 2xsin(y) + 3x²y

Die partielle Ableitung nach einer dieser Variablen erhält man, indem man alle anderen Variablen als konstant betrachtet und die Funktion nach der einen ausgewählten Variablen differenziert. Um anzudeuten, dass es sich nur um eine partielle Ableitung handelt, schreibt man $\frac{\delta}{\delta x}$ statt $\frac{d}{dx}$.

Die partiellen Ableitung einer Funktion f nach der Variablen x schreibt man kürzer: f_x.

Im angegebenen Beispiel wären also die partiellen Ableitungen nach x und nach y:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = f_x = 2\sin(y) + 6xy$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = f_y = 2x\cos(y) + 3x^2$$

Analog für mehr als zwei Variable.

Der Nabla-Operator

Will man Ableitungen von Funktionen mit mehr als einer Variablen beschreiben, leistet der Nabla-Operator ∇ (genauer $\vec{\nabla}$) gute Dienste. Er ist ein Vektor, dessen Komponenten die partiellen Differentialoperatoren sind.

Speziell für den Fall dreier Variablen gilt: $\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix}$.

Der Nabla-Operator wird insbesondere in Physik zur prägnanten Beschreibung von Sachverhalten verwendet.

(s. dazu unter Physik → Verschiedenes → grad-div-rot)

1. Ableitung (Gradient)

Um die 1. Ableitung einer mehrdimensionalen Funktion f zu erhalten, wendet man den Nabla-Operator auf die Funktion an.
Der Gradient wird auf eine Skalarfeld bzw. skalare Funktion f angewendet. Das Ergebnis ist ein Vektorfeld $\vec{V}$: grad f = $\nabla f = \vec{V}$

Die Funktion f ordnet jedem Punkt des Raumes (im dreidimensionalen Fall) einen Wert zu, wie oben angegeben beispielsweise ein Potential. ∇f ordnet einem Punkt einen Vektor zu, der in die Richtung des stärksten Anstiegs zeigt.
Wenn man an einem Hang steht und in alle Richtungen schaut, zeigt ∇f gerade in die Richtung, in der es am steilsten bergab (bzw bergauf) geht. Den Anstieg selbst erhält man dann durch den Betrag des Vektors.

Oder: Ein Körper „fällt“ im Gravitationsfeld in die Richtung, in der die Änderung des (Gravitations-)Potentials maximal ist.

Angewendet auf eine Skalarfunktion (hier f: $R^3 \rightarrow R$) ist $\vec{\nabla} \cdot f$ (oder kurz ∇f) das Analogon zur 1. Ableitung. $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} \\ \frac{\delta f}{\delta y} \\ \frac{\delta f}{\delta z} \end{pmatrix}$ für n = 3.

Im eindimensionalen Fall (n = 1) entspricht dies der 1. Ableitung.

Beispiel:
Sei f (x,y,z) = z + $2 \cdot x^2 - 7 \cdot y \cdot z$.

Dann ist $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} \\ \frac{\delta f}{\delta y} \\ \frac{\delta f}{\delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ -7z \\ 1-7y \end{pmatrix}$.

Im Punkt P(1/2/3) gilt dann: $\nabla f(1,2,3) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 \\ -7 \cdot 3 \\ 1-7 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -21 \\ -13 \end{pmatrix}$.

Anmerkung: Es lässt sich auch ein Gradient für Vektorfelder f: $R^n \rightarrow R^m$ - also $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ - definieren, den sogenannten Vektorgradienten. Er hat die Form einer Matrix, und ergibt bei Anwendung auf einen Vektor wiederum einen Vektor. Für n = m = 3 hat er die Form:

$$\text{grad } f = grad\begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x} & \frac{\delta f_1}{\delta y} & \frac{\delta f_1}{\delta z} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x} & \frac{\delta f_2}{\delta y} & \frac{\delta f_2}{\delta z} \\ \frac{\delta f_3}{\delta x} & \frac{\delta f_3}{\delta y} & \frac{\delta f_3}{\delta z} \end{pmatrix}$$

Das ist die Jacobi-Matrix von f, abgekürzt J_f.

Will man nun die Änderung des Anstiegs weiter verfolgen, verwendet man bekanntlich die 2. Ableitung.

Das Analogon zur zweiten Ableitung erhält man durch die Hesse-Matrix (hier: dim=3):

$$H_f(r) = \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta y_j}\right)_{i,j=1..3} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta x} & \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} & \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta z} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} & \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta y} & \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta z} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta z \delta x} & \frac{\delta^2 f}{\delta z \delta y} & \frac{\delta^2 f}{\delta z \delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}.$$

Es gilt: für beliebige x,y: $f_{xy} = f_{yx}$. Damit ist die Hesse-Matrix symmetrisch.
Der Nabla-Operator wird hier auf die 1. Ableitung der Funktion f, die ja eine Vektorfunktion ist, angewendet. Die Hesse-Matrix ist damit die Jacobi-Matrix der 1. Ableitung.

Will man nun beispielsweise Extremstellen der mehrdimensionalen Funktion bestimmen, ist die Vorgehensweise ähnlich wie bei einstelligen Funktion:

1. Als notwendige Bedingung partielle Ableitungen Null setzen
2. Als hinreichende Bedingung mögliche Extremstelle in die Hesse-Matrix einsetzen und deren Eigenwerte λ_i auf Definitheit überprüfen:

Alle Eigenwerte	positiv definit (alle $\lambda_i > 0$)	→ Minimum
	negativ definit (alle $\lambda_i < 0$)	→ Maximum
	beides	→ Sattel
	pos. semidefinit (alle $\lambda_i \geq 0$)	→ weitere Untersuchungen
	neg. semidefinit (alle $\lambda_i \leq 0$)	→ weitere Untersuchungen

Eigenwerte einer Matrix bestimmt man, indem man auf der Diagonalen der Matrix jeweils den Eigenwert λ subtrahiert und dann die Determinante berechnet.

Anmerkung:
Eine nxn – Matrix A kann als Abbildung des R^n in sich aufgefasst werden: A: $R^n \rightarrow R^n$.
Ein Eigenvektor $\vec{v}$ ist ein Vektor, der unter der Abbildung seine Richtung nicht verändert. Er wird höchstens gestreckt.
Der Streckfaktor entspricht dem Eigenwert λ zum Eigenvektor $\vec{v}$, also $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$.

Rechnung: $(A - \lambda E)\,\vec{v} = \vec{0}$ *mit E:Einheitsmatrix*

$(A - \lambda E)$ *heißt modifizierte Matrix*

(zweidimensionales) Beispiel

f: $R^2 \to R$ mit $f(x,y) = x^2 + 1{,}5y^2 - y^3$.

Dann gilt: $f_x = 2x$ und $f_y = 3y - 3y^2$ und $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3-6y \end{pmatrix}$

Ad 1 (partielle Ableitungen Null setzen):

$2x = 0 \quad \to \quad x = 0$

$3y - 3y^2 = 0 \quad \to \quad y = 0$ oder $y = 1$

Mögliche Extremwerte: $E_1\,(0/0)$ sowie $E_2\,(0/1)$

Ad 2

Um die Definitheit einer Matrix zu bestimmen, muss man bei den Komponenten der Hauptdiagonalen eine Variable λ subtrahieren und das sogenannte charakteristische Polynom lösen.

modifizierte Hesse-Matrix $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-6y-\lambda \end{pmatrix}$

E_1 in Determinante der modifizierten Hesse-Matrix einsetzen:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-6\cdot 0-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

charakteristisches Polynom $(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$

$\to \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \to$ Eigenwerte: $\lambda_1 = 3$ oder $\lambda_2 = 2$

positiv definit $\to E_1\,(0/0)$ ist Minimum.

E_2 in Determinante der modifizierten Hesse-Matrix einsetzen:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-6\cdot 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(2 - \lambda)(-3 - \lambda) = 0 \to \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \to$ Eigenwerte: $\lambda_1 = -3$ oder $\lambda_2 = 2$

$E_2\,(0/1)$ ist Sattelpunkt.

Anmerkung:

Um die zugehörigen Eigenvektoren zu bestimmen, muss man die Eigenwerte in die Hesse-Matrix einsetzen und diese mit einem Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ *multiplizieren und gleich dem Nullvektor setzen. Das entstehende Gleichungssystem lösen.*