Maxwell-Gleichungen

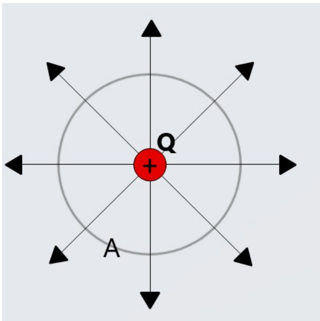
Mit Hilfe dieser Gleichungen hat der englische Physiker James Clerk Maxwell 1866 sämtliche Phänomene des Elektromagnetismus beschrieben. Daraus folgte auch die Vorhersage sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitender elektromagnetischer Wellen, die Heinrich Hertz 1888 nachweisen konnte – der Startschuss zur Funktechnik!

Elektrostatik (keine zeitlichen Änderungen)

1. Gaußsches Gesetz

Die erste Maxwell-Gleichung ist im Prinzip einfach das Coulomb-Gesetz, sie besagt, dass elektrische Felder von elektrischen Ladungen hervorgerufen werden. Die Ladung ist die Quelle (oder Senke) des elektrischen Feldes.
Der elektrische Fluss ($\Phi = E\,A$) durch eine geschlossene (deshalb der Kringel im Integralzeichen) Fläche A ist proportional zur eingeschlossenen Ladung Q.

$$\epsilon_0 \oint E\,dA = Q$$



Anmerkung: Die geschlossene Fläche A kann man sich als Oberfläche (eines Volumens z. B. einer Kugel) vorstellen, durch die elektrische Feldlinien hindurchtreten, die von der felderzeugenden Ladung Q ausgehen.

Herleitung Coulomb-Gesetz:

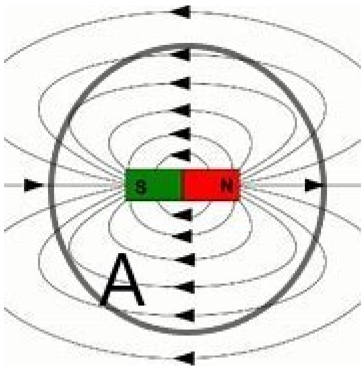
$$\begin{aligned}\epsilon_0 \oint E\,dA &= \epsilon_0\, E\, A && \text{(Feldstärke E von A unabhängig s. Bild)}\\ &= \epsilon_0\, E \cdot 4\,\pi\, r^2 && \text{(Kugeloberfläche)}\\ &= \epsilon_0\, \frac{F}{q} \cdot 4\,\pi\, r^2 && \text{(Def: Feldstärke E = Kraft F / Probeladung q)}\\ &= Q\end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q\,q}{r^2}$$

2. Gaußsches Gesetz

Die zweite Maxwell-Gleichung besagt, dass es keine magnetischen Punktladungen (Monopole) im Gegensatz zu elektrischen Ladungen gibt. Man sagt: das magnetische Feld ist quellenfrei! Magnetische Feldlinien sind immer in sich geschlossen.

$$\oint B\,dA = 0$$



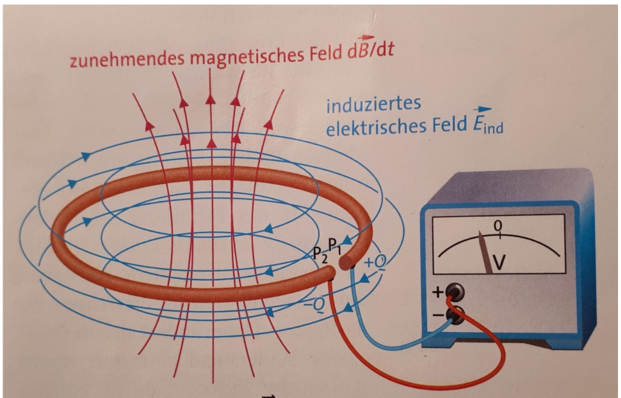
Anmerkung: Im Inneren der Kugel mit der Kugeloberfläche A befindet sich ein Magnet mit einem Nord- und Südpol, denn es gibt keinen Monopol! Eine Feldlinie, die durch die Oberfläche A austritt, tritt auch in die Oberfläche A wieder ein. In Summe ist demnach die durch die Oberfläche A hindurchtretende magnetische Feldstärke Null!

Elektrodynamik (zeitliche Änderungen)

3. Faradaysches Induktionsgesetz

Die dritte Maxwell-Gleichung beschreibt die elektromagnetische Induktion, also die Erzeugung von elektrischen Feldern bzw. Spannungen durch veränderliche Magnetfelder.

$$\oint E\,ds = - \frac{d}{dt}\int B\,dA = U_{ind}$$



264.1 Die Feldänderung $d\vec{B}/dt$ induziert ein elektrisches Feld $\vec{E}_{ind}$, das in einer Leiterschleife eine Ladungsverschiebung hervorruft. Gemessen wird die Induktionsspannung U_{ind}.

Anmerkung: $\frac{d}{dt}\int B\,dA$ besitzt keinen Kreis im Integralzeichen. Man hat es nicht mit einer geschlossenen (Ober-)Fläche zu tun, sondern mit einer „gewöhnlichen" Fläche (im 2-dimensionalen). Man umläuft den Rand dieser Fläche. Die Leiterschleife bildet den Rand dieser Fläche. Dieser Weg s ist geschlossen, deshalb der Kreis im Integralzeichen bei $\oint E\,ds$.

Das Minus-Zeichen in der Gleichung folgt aus der Lenzschen Regel.

Durch die Fläche treten Magnetfeldlinien hindurch (im Bild rot). Ändert sich das durch die Fläche hindurchtretende Magnetfeld B (senkrechter Anteil), werden geschlossene elektrische Feldlinien erzeugt (im Bild blau). Öffnet man eine(gedachte) elektrische Feldlinie, kann man an deren Enden eine Spannung U_{ind} messen.

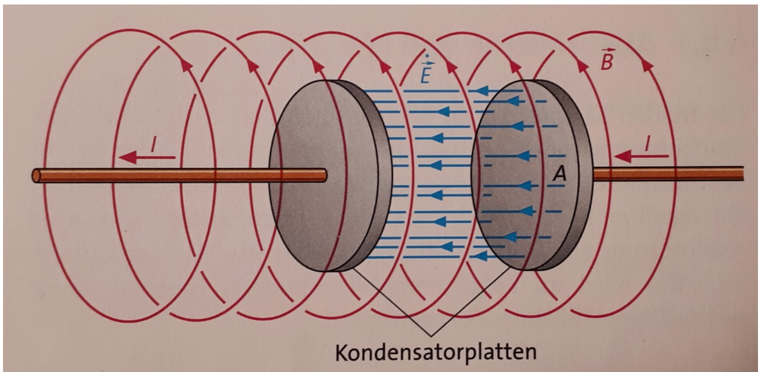
Der rechte Teil der Gleichung entspricht einfach dem Induktionsgesetz – die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses entspricht der (negativen induzierten Spannung: $U_{ind} = -n\dot{\Phi} = -n(\dot{BA})$ mit n: Anzahl der Leiterschleifen.

4. Amperesches Durchflutungsgesetz

1.Die vierte Maxwell-Gleichung gibt an, wie durch zeitlich veränderliche elektrische Felder magnetische Felder entstehen.

$$\oint B\,ds = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d}{dt}\int E\,dA \right)$$

Anmerkung: Tritt ein Strom I (oder eine Summe von Strömen $\sum_i I_i$) durch eine Fläche A hindurch, entsteht bei einem Umlauf um den Rand dieser Fläche (deshalb wieder ein Kringel bei $\oint B\,ds$ im Integralzeichen) ein Magnetfeld mit einer geschlossenen Magnetfeldlinie (s. im Bild rote Feldlinien).
Für eine kreisförmige Fläche gilt s = 2 π r, und man erhält das Magnetfeld um einen stromdurchflossenen Leiter: B = $\mu_0 \dfrac{I}{2\pi r}$.



265.1 Bei der Aufladung eines Kondensators erzeugt der Ladestrom ein Magnetfeld, das in gleicher Weise auch das sich ändernde elektrische Feld im Kondensator umgibt

Betrachtet man eine Fläche A, durch die ein zeitlich sich änderndes elektrisches Feld hindurchgeht, entsteht entlang des Randes der Fläche ein magnetisches Wirbelfeld (also geschlossene Feldlinien). Dies drückt der 2. Summand in der 4. Maxwell-Gleichung aus.
Der zweite Summand wird auch als Verschiebungsstrom bezeichnet, entspricht demnach einem durch die Fläche A hindurchgehenden zeitlich sich ändernden elektrischen Feld.

Anmerkung: Die oben angegebenen Gleichungen sind in integraler Form angegeben. Die Gleichungen können auch in differentieller Form angegeben werden:

$$\epsilon_0 \cdot \operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \rho$$ *(mit ρ Ladungsdichte)*

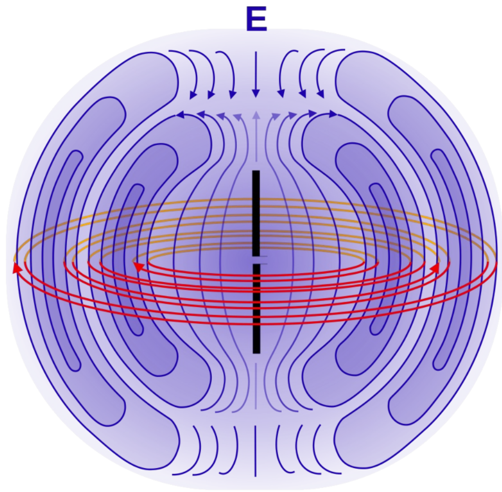
$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$rot\, \vec{E} = \nabla\, x\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

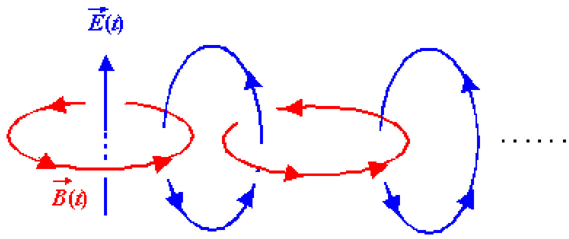
$$rot\, \vec{B} = \nabla\, x\, \vec{B} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Zur Schreibweise sei auf grad – div – rot verwiesen.

Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischen Wellen



Elektromagnetische Wellen breiten sich im Raum durch zueinander orthogonale elektrische und magnetische Felder aus (beide Feldvektoren auch orthogonal zur Ausbreitungsrichtung). Im Bild dargestellt ist die Erzeugung einer elektromagnetischen Welle durch einen Hertzschen Dipol – das ist der schwarze Stab, der eine Antenne symbolisiert, in dem Ladungen (Elektronen) auf und ab schwingen.
Das Bild stelle man sich rotationssymmetrisch zum Dipol vor. Die Feldlinien sind geschlossen.
el. Feldlinien: blau
magn. Feldlinien: rot
Anmerkung: Man sieht: direkt ober- und unterhalb des Dipols (oberes Bild) sind kaum el. Feldlinien zu erkennen. Man wird dort keine el. Wellen „empfangen“.



Elektrische Felder werden mit einem Dipol (Antenne) empfangen, die parallel zum Sendedipol ausgerichtet sind (die Elektronen im Empfangsdipol werden zum Schwingen angeregt – stehende Wellen). Magnetische Felder mit einer Empfangsspule orthogonal zum Sendedipol empfangen..
In der Regel sind beispielsweise in Handys verschiedene Empfangsvorrichtungen eingebaut – sowohl für elektrische als auch magnetische Felder. Sie sind außerdem noch auf verschiedene Frequenzen (sogenannte Bänder) abgestimmt.
Für stehende Wellen gilt: halbe Wellenlänge = Antennenlänge

Die Idee ist:

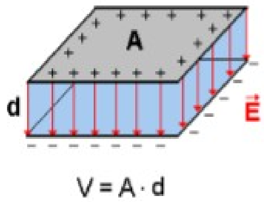
1. Beide Felder sind gleichberechtigt. Deshalb müssen die Energiedichten der beiden Felder gleich sein. Die Energiedichte σ ist die Energie W pro Volumen V: $\sigma = \frac{W}{V}$.

2. Soll ein geladenes Objekt mit der Geschwindigkeit v ohne Ablenkung ein elektrisches und ein dazu orthogonales Magnetfeld passieren (v, B, E paarweise zueinander orthogonal), müssen sich die Lorentz- und die el. Kraft aufheben (Wienscher Filter):

$$F_L = F_{el} \rightarrow q\,v\,B = q\,E \rightarrow v = \frac{E}{B} \qquad (*)$$

Das gilt auch, wenn das geladene Objekt ruht und stattdessen sich die Felder mit der Geschwindigkeit v bewegen.
In dieser Gleichung kommt die Ladung (und auch die Masse) des Objekts nicht mehr vor. Man kann deshalb die Geschwindigkeit v so deuten, dass sich bei dieser

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Felder (auch ohne Anwesenheit von geladenen Objekten) die Felder „neutralisieren“.



Energiedichte σ_{el} im el. Feld (anhand Kondensator):

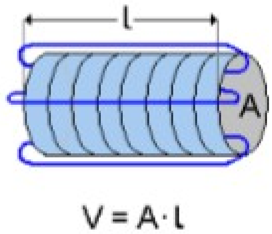
Energie des el. Feldes: $W_{el} = \frac{1}{2} C U^2$

mit der Kapazität $C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}$ und der Spannung $U = \frac{E}{d}$.

Eingesetzt erhält man $W_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 A \cdot d$.

Das ist die Energie, die durch das elektrische Feld im Volumen $V = A \cdot d$ vorhanden ist.

Daraus folgt für die Energiedichte: $\sigma_{el} = \frac{W_{el}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$.



Energiedichte σ_{magn} im magn. Feld (anhand Spule):

Energie des magn. Feldes: $W_{magn} = \frac{1}{2} L I^2$

mit der Induktivität $L = \mu_r \mu_0 n^2 \frac{A}{l}$ und der Feldstärke B = .$\mu_r \mu_0 \frac{n}{l} I \rightarrow I = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \frac{l}{n} B$.

Eingesetzt erhält man $W_{magn} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_r \mu_0} B^2 A \cdot l$

Das ist die Energie, die durch das magnetische Feld im Volumen $V = A \cdot l$ vorhanden ist.

Daraus folgt für die Energiedichte: $\sigma_{magn} = \frac{W_{magn}}{V} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_r \mu_0} B^2$.

Gleichsetzen der Energiedichten

$$\sigma_{el} = \sigma_{magn}$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_r \mu_0} B^2$$

$$\frac{E^2}{B^2} = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0} \rightarrow v = \frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} \quad \text{wegen (*)}$$

v ist die Geschwindigkeit, mit der sich ein elektrisches und ein dazu orthogonales Magnetfeld “neutral“ im Raum ausbreiten.
Das trifft auf sich im Raum ausbreitende elektromagnetische Wellen zu.
Im Vakuum gilt für die relativen Feldkonstanten: $\epsilon_r = \mu_r = 1$.

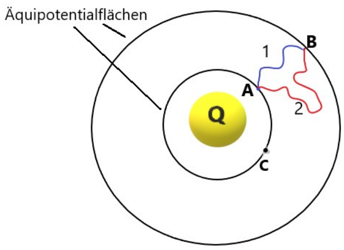
Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle im Vakuum entspricht der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2{,}9979 \cdot 10^8 \ \frac{m}{s} = c \ \text{(Lichtgeschwindigkeit)}$$

Anmerkung: In Materie kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen (z.B. Licht) deutlich kleiner sein, weil die relativen Feldkonstanten größer als 1 sind. Dringen beispielsweise geladene Teilchen in Wasser mit einer Geschwindigkeit ein, die größer als die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht im Wasser ist (etwa $2{,}25 \cdot 10^8$), entsteht die sogenannte Tscherenkov-Strahlung (analog zum Überschall-Knall für Schallwellen).

Potentialfelder – Wirbelfelder

Bewegt man sich in einem Feld von einem Punkt A nach einem Punkt B, wird im Allgemeinen Verschiebungsarbeit verrichtet.

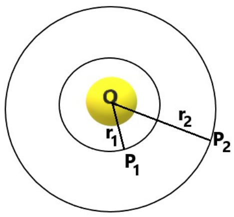


Ist die Verschiebungsarbeit vom Weg abhängig, spricht man von einem Wirbelfeld.
Ist die Verschiebungsarbeit vom Weg unabhängig, spricht man von einem Potentialfeld.

Potentialfelder

Im Bild wird ein Objekt mit der Ladung q im elektrischen Feld der Ladung Q von Punkt A nach Punkt B auf zwei verschiedenen Wegen (Weg 1 und Weg 2) bewegt. Im vorliegenden Fall ist die Arbeit vom Weg unabhängig. Von A nach C wird keine Arbeit verrichtet, weil A und C auf einer Äquipotentialfläche liegen. Auch von Punkt A auf einem beliebigen Weg zurück nach A (geschlossener Weg) wird keine Arbeit verrichtet – unabhängig vom gewählten Weg. Es handelt sich deshalb um ein Potentialfeld.

Exkurs bzw. Wiederholung:



Um eine ((Probe)Ladung q von einem Abstand r_1 auf einen Abstand r_2 bzgl. Ladung Q zu bewegen, ist eine Arbeit W im elektrischen Feld erforderlich:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F_C \, dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \, dr = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) .$$

Beschreibt man die Arbeit, die von einem Bezugspunkt (meist der unendlich ferne Punkt bzw $r_1 = \infty$) zu einem Punkt P im Abstand r von der felderzeugenden Ladung Q benötigt wird, gelangt man zum Begriff der potentiellen Energie im Punkt P:

$$E_{pot} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r} \hat{r}^2 \, d\hat{r} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \qquad \text{(Bezugspunkt im Unendlichen).}$$

Die potentielle Energie ist von der sich im Feld befindlichen Ladung q abhängig.
Um eine Aussage über das Feld der felderzeugenden Ladung Q unabhängig von der Probeladung q zu erhalten, führt man weiter den Begriff des Potentials V im Abstand r ein:

$V = \frac{E_{pot}}{q} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$ *(Bezugspunkt im Unendlichen).*

Vergleicht man zwei Punkte P_1 und P_2 im elektrischen Feld miteinander, ist in der Regel die Potentialdifferenz der beiden Punkte wichtig (gleiche Bezugspunkte vorausgesetzt). Dann kann man wieder die Arbeit berechnen, um die (Probe)Ladung q von einem Punkt zum anderen zu bewegen: $W = q \cdot \Delta V = q \cdot U$ (U Spannung)

Notabene: Feld und Potential beziehen sich auf das felderzeugende Objekt, Kraft und potentielle Energie beziehen sich auf ein in einem Feld befindliches Objekt.

Völlig analog lässt sich das Gravitationsfeld einer Masse M beschreiben:

$W = \gamma mM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$ *mit der (Probe)Masse m*

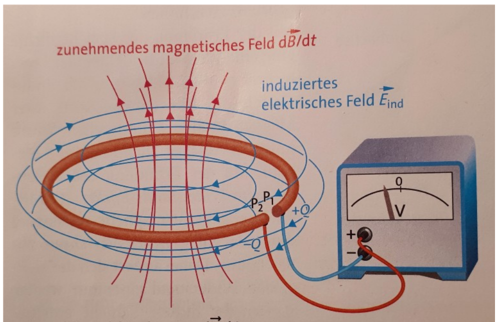
$E_{pot} = -\gamma Mm\frac{1}{r}$ *und* $V = -\gamma M\frac{1}{r}$

Unterschied: Massen ziehen sich immer an.

Beispiele für Potentialfelder: elektrisches Feld einer Punktladung
Gravitationsfeld einer Masse (z.B. Erde)
elektrisches Feld eines geladenen Kondensators

Wirbelfelder

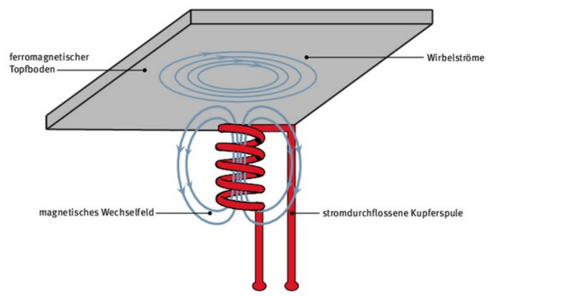
Im Bild erkennt man geschlossene elektrische Feldlinien, die durch ein sich änderndes magnetisches Feld erzeugt werden.(s. Induktionsgesetz). Eine (gedachte) Feldlinie ist aufgetrennt. Man kann dann an den Enden eine Induktionsspannung messen.
Die Orientierung der el. Feldlinien erhält man durch die Lenzsche Regel.
Ein Elektron wird bei einem Umlauf gegen den Uhrzeigersinn Energie aufnehmen und kann dann Arbeit verrichten. Würde man das Elektron andersherum bewegen, müsste Arbeit am Elektron verrichtet werden. Die Verschiebungsarbeit ist bei einem Umlauf demnach wegabhängig!
Es handelt sich hier beim elektrischen Feld um ein Wirbelfeld.



264.1 Die Feldänderung $d\vec{B}/dt$ induziert ein elektrisches Feld $\vec{E}_{ind}$, das in einer Leiterschleife eine Ladungsverschiebung hervorruft. Gemessen wird die Induktionsspannung U_{ind}.

In diesem Beispiel entsteht ein Ringstrom, der Arbeit verrichtet (im Gegensatz zu einem Potentialfeld). Deshalb muss „von außen“ Energie zugeführt werden – durch die Änderung des Magnetfeldes.

Anwendung findet dieser Sachverhalt im Induktionsfeld eines Herdes. Unter der Kochplatte befindet sich eine Spule, die mit (hochfrequenter) Wechselspannung betrieben wird – Ursache eines sich ändernden Magnetfeldes. Die magnetischen Feldlinien verlaufen orthogonal zur Herdplatte. Dadurch wird im Topfboden ein elektrisches Wirbelfeld erzeugt (geschlossene el. Feldlinien) . Da der Topfboden aus einem leitenden Material bestehen muss, wird durch den entstehenden Ringstrom Wärme erzeugt. Verwendet man ferromagnetisches Material für den Topfboden, kann außerdem durch das ständige Umklappen der magnetischen Momente der Atome des Topfbodens (s. Weisssche Bezirke) zusätzlich Energie an den Topfboden abgegeben werden.



Ein weiteres interessantes Beispiel ist folgender Aufbau.

Aufgrund des sich ändernden Magnetfeldes B (nur) im Inneren des Weges A – A’ – B’ – B – A entsteht eine Ringspannung U (Induktionsgesetz) und in Folge ein Ringstrom I. Sind die Widerstände R und R’ unterschiedlich, wird man unterschiedliche Spannungsabfälle U_1 und U_2 über den Widerständen messen (vorausgesetzt: hochohmige Spannungsmessgeräte).
Das ist nicht überraschend. Denn da es sich hier um ein Wirbelfeld handelt, kann man eben nicht argumentieren, dass A und A’ bzw B und B’ auf gleichen Potentialen liegen!