Übungen

1. Ein Mensch der Masse 75kg befindet sich am Äquator.

a) Berechnen Sie den Betrag der Zentripetalkraft, die auf ihn wirkt, wenn er sich mit der Erde, angenommen als Kugel mit dem Radius r_E=6370km, mitbewegt.

b) Erläutern Sie, wer die Zentripetalkraft aufbringt.

c) Erläutern Sie, ob die Zentripetalkraft zu den Polen hin größer oder kleiner wird.

d) Berechnen Sie den Betrag der Zentripetalkraft bei uns in Mitteleuropa (50° nördlicher Breite).

2. Unsere Erfahrung sagt uns, dass ein geworfener Stein wieder zur Erde fällt. Auch eine abgeschossene Kanonenkugel bleibt nicht oben. Angenommen man könnte einen Stein von einem sehr hohen Berg mit großer Geschwindigkeit waagerecht wegschleudern: Auf welcher Bahnkurve wird sich dieser Stein bewegen?

Über diese Frage dachte bereits Isaac NEWTON im 17. Jahrhundert nach, und er kam zu dem Schluss, dass bei einer bestimmten Geschwindigkeit der Stein den Erdboden nicht mehr erreichen, sondern unendlich lang auf einer Kreisbahn um die Erde "herumfallen" wird. Natürlich ist eine Kreisbewegung direkt an der Erdoberfläche aufgrund der Erhebungen und der Luftreibung real nicht möglich.

Berechnen Sie den Betrag der Bahngeschwindigkeit, mit der ein derart weggeschleuderter Stein eine Kreisbewegung ausführen würde (idealisierte Bedingungen (keine Erhebungen, keine Luftreibung) vorausgesetzt)

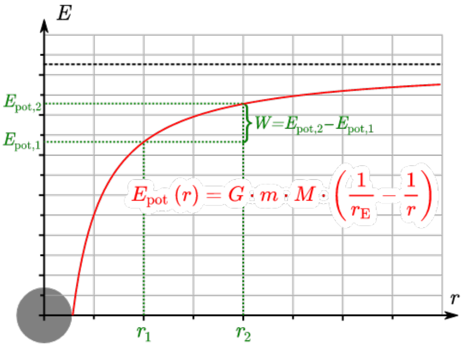
Diese Geschwindigkeit wird auch 1. kosmische Geschwindigkeit genannt.

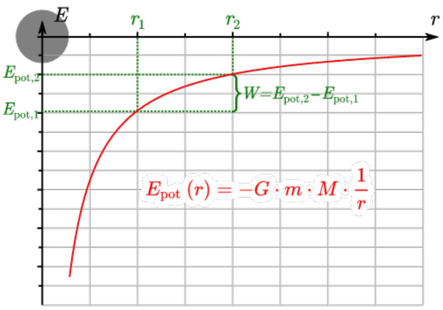
Potentielle Energie im Gravitationsfeld

Das Wichtigste auf einen Blick

- Die potentielle Energie im Gravitationsfeld hängt von der Wahl des Nullpunktes der potentiellen Energie ab.
- Ist $E_{pot,Erde}=0$, dann gilt $E_{pot}(r)=G \cdot m \cdot M \cdot (1/r_{Erde}-1/r)$ wobei $r \geq r_{Erde}$
- Typischer ist es, den Nullpunkt der potentiellen Energie ins Unendliche zu legen. Dann gilt

$E_{pot}=-G \cdot m \cdot M \cdot 1/r$ wobei $r \geq r_{Erde}$





Man sieht, dass bei der Nullpunktswahl im Unendlichen (unteres Bild) die potentielle Energie eines Punktes auf der Erdoberfläche negativ ist.

Man sieht aber auch, dass – unabhängig von der Wahl des Nullpunktes der potentiellen Energie – die Änderung der potentiellen Energie, d.h. die verrichtete Arbeit W beim Weg von einem Abstand r_1 zu einem Abstand r_2 in beiden Systemen die gleiche ist.

Kinetische Energie für eine stabile Kreisbahn im Gravitationsfeld

Wenn der Trabant ruht, wird er direkt durch die Gravitationskraft in Richtung Zentralkörper beschleunigt, bis er dort einschlägt. Damit der Trabant dies nicht tut muss er sich bewegen und damit auch kinetische Energie besitzen.

Damit sich ein Trabant der Masse m im Gravitationsfeld eines Zentralkörpers der Masse M stabil im Abstand r auf einer Kreisbahn bewegen kann, muss die Gravitationskraft F_G gleich der notwenigen Zentripetalkraft F_{ZP} wirken. Damit muss gelten

$$\begin{aligned} F_{ZP} &= F_G \\ \frac{m \cdot v^2}{r} &= G \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r^2} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2} r \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= \frac{1}{2} \cdot G \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r} \end{aligned}$$

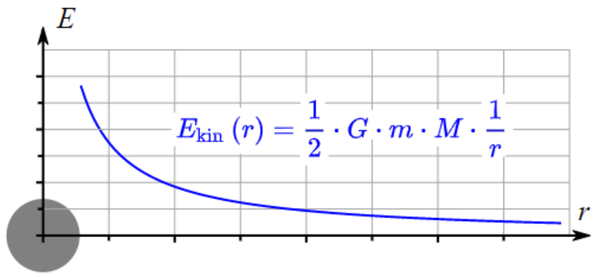


Abb. 2 Kinetische Energie E_{kin}, die ein Trabant für eine stabile Kreisbahn um einen Zentralkörper benötigt, in Abhängigkeit vom Bahnradius r

Auf der linken Seite der Gleichung steht der Term für die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ des Trabanten. Wir erhalten also

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot G \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r}$$

Der Term auf der rechten Seite der Gleichung ist gerade die Hälfte des Betrags der potenziellen Energie $E_{\text{pot}}(r) = -G \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r}$ des Systems Zentralkörper-Trabant. Damit erhalten wir

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot |E_{\text{pot}}|$$

Für stabile Kreisbahnen um einen Zentralkörper gilt demnach: **Der Wert für die kinetische Energie ist stets positiv und halb so groß ist wie der Betrag der potentiellen Energie.**

Gesamtenergie auf einer stabilen Kreisbahn im Gravitationsfeld

Die Gesamtenergie E_{ges} des Systems Zentralkörper-Trabant, bei dem sich der Trabant auf einer stabilen Kreisbahn um den Zentralkörper bewegt, ist die Summe aus potenzieller Energie E_{pot} und kinetischer Energie E_{kin}. Wir erhalten

$$\begin{aligned} E_{\text{ges}} &= E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot G \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r} + \left(-G \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot G \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r} \end{aligned}$$

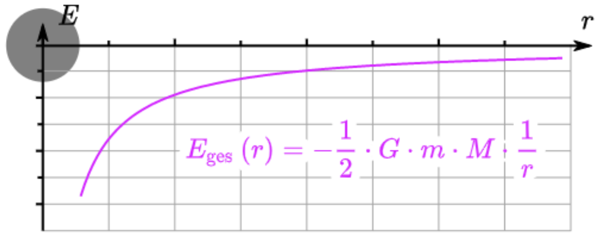
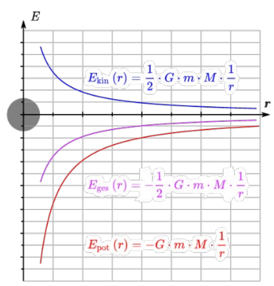


Abb. 3 Gesamtenergie E_{ges} des Systems Zentralkörper-Trabant, wenn sich der Trabant auf einer stabilen Kreisbahn um den Zentralkörper befindet, in Abhängigkeit vom Bahnradius r

Der Term auf der rechten Seite der Gleichung ist nun gerade die Hälfte der potenziellen Energie $E_{\text{pot}}(r) = -G \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r}$ des Systems Zentralkörper-Trabant. Damit erhalten wir

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \cdot E_{\text{pot}}$$

Der Wert für die Gesamtenergie ist also stets negativ (denn die potentielle Energie ist negativ) und halb so groß ist wie die potentielle Energie.



3. Als zweite kosmische Geschwindigkeit bezeichnet man diejenige Geschwindigkeit, mit der ein Körper vertikal von der Erdoberfläche abgeschossen werden müsste, um antriebslos das Gravitationsfeld der Erde zu verlassen. Die Eigenrotation der Erde und mögliche Swing-By-Manöver am Mond oder anderen Planeten sollen dabei nicht berücksichtigt werden.

Das Verlassen des Gravitationsfeldes der Erde allein durch diese Anfangsgeschwindigkeit ist allerdings praktisch wegen des hohen Luftwiderstands an der Erdoberfläche nicht möglich.
Berechnen mithilfe eines geeigneten Energieansatzes – also $E_{pot}+E_{kin} = 0$ **-** den Betrag der zweiten kosmischen Geschwindigkeit.

4. Ein Satellit der Masse 500kg befindet sich auf einer Kreisbahn in 400km Höhe über der Erdoberfläche.

a) Berechnen Sie die potentielle Energie des Systems Erde-Satellit.
b) Berechnen Sie die Winkel- und die Bahngeschwindigkeit des Satelliten.
c) Berechnen Sie die kinetische Energie des Satelliten.
d) Berechnen Sie die Gesamtenergie des Systems Erde-Satellit.